TOP SUKSES

Jonathan Hoseana

OLIMPIADE MATEMATIKA SMA/MA

MATERI DIKONSEP
untuk menyiapkan siswa menghadapi Olimpiade Matematika

TRIK JITU
penyelesaian soal-soal Olimpiade Matematika dari soal termudah sampai tersulit.

OSN MATEMATIKA

01

SOAL DAN BAHASAN
yang sistematik untuk menjawab soal-soal olimpiade

KUMPULAN SOAL
Olimpiade Sains Nasional (OSN) Matematika paling *uptodate*

TOP SUKSES
Olimpiade Matematika
SMA/MA

Jonathan Hoseana

Diterbitkan oleh Penerbit PT Grasindo, Jakarta, 2016

Top Sukses Olimpiade Matematika SMA/MA

Penulis: Jonathan Hoseana

ID: **571680037**

Editor: Eko Setiawan
Penata isi: Yusuf Pramono
Desainer sampul: DiensCreative
Design by freepik.com

Diterbitkan pertama kali oleh Penerbit PT Grasindo,
anggota Ikapi, Jakarta, 2016

Dicetak oleh Percetakan PT Gramedia, Jakarta

Isi di luar tanggung jawab Percetakan

Daftar Isi

Kata Pengantar

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis mendapatkan kesempatan untuk menerbitkan ulang buku ini dalam edisi revisi. Penulis berterima kasih kepada pihak Penerbit Grasindo yang telah bersedia memproses buku ini.

Tidak lama semenjak buku ini pertama kali terbit, penulis telah mendapatkan sangat banyak masukan untuk perbaikan buku ini. Mulai dari komentar dan perbaikan mengenai isi, penyajian, soal latihan, kunci jawaban, dan sebagainya. Untuk semua masukan yang baik itu, pada kesempatan ini penulis ingin setulusnya mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak. Dari semua itu penulis sangat melihat adanya penghargaan dari para pembaca akan isi buku ini. Penulis menjadi semakin termotivasi karenanya.

Selain kepada pihak Penerbit Grasindo, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada berbagai pihak lain. Pertama, kepada keluarga penulis yang selalu memberikan dukungan bagi penulis untuk bekerja di bidang matematika. Kedua, kepada semua dosen, staf, dan semua teman, baik seangkatan maupun berbeda angkatan di Jurusan Matematika Universitas Katolik Parahyangan Bandung, maupun jurusan lainnya. Ketiga, kepada para guru, khususnya guru matematika dan komputer, juga kepada teman-teman, di SMA Santa Maria Surabaya.

Penulis juga tidak ingin melupakan para pembaca yang mengajak penulis berteman di jejaring sosial semenjak buku ini terbit. Terima kasih atas ungkapan rasa menyenangi buku ini, terima kasih juga kepada siapapun di antara kalian yang pernah memberikan motivasi maupun kritik dan saran mengenai isi buku ini. Penulis merasa sangat bersyukur karena melalui buku ini, penulis dapat berkontribusi kepada semua orang yang bahkan sebelumnya tidak penulis kenal. Semoga kalian semua menjadi

anak-anak olimpiade yang berprestasi, sukses, dan membanggakan. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu demi satu.

Isi edisi revisi ini pada dasarnya tidak jauh berbeda dengan edisi pertama, namun ada beberapa pengubahan. Pertama, penulis mengubah letak soal-soal perlatihan dari yang semula terkumpul di akhir bab/subbab menjadi lebih tersebar di sela-sela pembahasan konsep. Dengan pengubahan ini penulis berharap soal-soal tersebut terlihat lebih menyatu dengan konsep, sehingga para pembaca dapat belajar dengan cara menyerap informasi yang ada di pembahasan suatu konsep, membaca contoh soal, lalu segera menerapkannya dalam mengerjakan beberapa soal yang berkenaan dengan konsep tersebut. Cara belajar seperti ini diharapkan lebih menuntun pembaca secara tahap demi tahap.

Masih mengenai soal-soal perlatihan, penulis menghapus beberapa soal yang terlalu sukar, dan memberikan tambahan petunjuk pada soal-soal yang menurut penulis sukar. Hal ini penulis lakukan supaya kumpulan soal tidak menjatuhkan mental para pembaca karena dipenuhi oleh soal-soal yang sukar. Penulis justru berharap para pembaca berusaha menyelesaikan semua soal tersebut.

Sebagai ganti dari dihapusnya beberapa soal yang terlalu sukar, penulis menambahkan beberapa soal lain yang masih relevan, dan penulis juga menyisipkan sedikit materi baru. Antara lain, pada akhir pembahasan mengenai pertidaksamaan AM-GM, penulis menyisipkan salah satu penggunaan pertidaksamaan AM-GM dalam masalah nilai ekstrem. Sebenarnya ada beberapa materi lain yang ingin penulis tambahkan, khususnya mengenai teori bilangan, tetapi untuk saat ini penulis menyimpannya sebagai bahan untuk menulis buku berikutnya, mengingat buku ini sudah berisi cukup banyak.

Pengubahan lain tentu saja berupa penyempurnaan dan perbaikan kalimat-kalimat dan pilihan-pilihan kata pada pembahasan konsep. Ada juga pembahasan dan contoh soal yang dihapus karena penulis rasa kurang relevan dan ada juga yang penulis perbaiki karena terdapat kesalahan. Semua ini penulis lakukan berdasarkan saran-saran yang baik dari para pembaca.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa edisi revisi ini pun masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mohon maaf apabila masih terdapat kekurangan pada buku ini. Penulis berharap dapat terus menerima segala kritik dan saran yang membangun dari para pembaca untuk memperbaiki mutu buku ini. Sekali lagi terima kasih karena sudah menjadikan buku ini bermakna, dan semoga buku ini tetap bermanfaat untuk seterusnya.

Penulis

BAB I
PEMECAHAN MASALAH

1.1 Empat Langkah Utama Memecahkan Masalah Matematika

George Polya (1887–1985), seorang matematikawan asal Hungaria, mengemukakan empat langkah yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah matematika. Keempat langkah tersebut adalah sebagai berikut.

1. **Pahami Permasalahan**

   Albert Einstein pernah berkata, "Jika saya diberi waktu satu jam untuk menyelesaikan suatu masalah, maka saya akan memakai 55 menit untuk memahami dan memformulasikan masalah dan sisanya untuk mendapatkan solusi dari masalah itu."

   Perkataan Einstein ini benar-benar menunjukkan bahwa dalam memecahkan suatu masalah, memahami masalah jauh lebih penting daripada mencoba menjawabnya secara langsung. Bagaimana kita dapat menjawab suatu masalah jika tidak memahaminya? Lebih lanjut, jangan sampai pemahaman kita akan suatu masalah mengantarkan kita pada konsep yang keliru tentang masalah tersebut, sehingga kita keliru pula memecahkannya. Oleh karena itu, memahami permasalahan membutuhkan ketelitian. Polya mengajarkan beberapa pertanyaan yang dapat menuntun kita untuk memahami permasalahan, di antaranya:

   a. Apakah kita memahami setiap kata dalam permasalahan tersebut?
   b. Apakah yang ditanyakan?

c. Dapatkah kita menyatakan kembali permasalahan tersebut dengan bahasa kita sendiri?
d. Dapatkah kita berpikir tentang suatu gambar atau diagram yang dapat membantu kita memahami permasalahan tersebut?
e. Sudah cukupkah informasi yang diberikan bagi kita untuk menemukan solusi?
f. Adakah hal yang perlu kita pertanyakan sebelum menemukan solusi?

2. **Rancang Suatu Strategi**

Menurut Polya, terdapat banyak sekali cara atau strategi yang dapat kita gunakan dalam memecahkan masalah. Beberapa strategi menyelesaikan masalah akan dikemukakan pada bab III. Namun, hal yang terpenting di atas semua strategi ini adalah pengalaman. Kemampuan kita memilih strategi yang cocok dapat kita kembangkan dengan banyak berlatih. Memperbanyak diri berlatih menyelesaikan soal-soal akan membuat logika kita semakin terasah dan membuat kita lebih mudah memandang persoalan-persoalan tersebut dengan pas.

Sebagai tambahan, kita dapat pula berpikir, apakah kita menjumpai sesuatu yang familiar dalam soal tersebut? Jika kita telah banyak memiliki pengalaman dalam menyelesaikan masalah, mungkin sebelumnya kita sudah pernah menyelesaikan suatu masalah yang mirip. Hal ini tentu akan membantu kita dalam merancang strategi.

3. **Laksanakan Strategi Tersebut**

Langkah selanjutnya setelah kita merancang dan menyusun strategi tidak lain adalah melaksanakan strategi tersebut. Ini lebih mudah daripada memilih dan menyusun strategi. Hal yang kita perlukan hanyalah kesabaran untuk memerhatikan setiap langkah dari strategi yang kita lakukan. Jika suatu strategi yang kita rancang ternyata tidak berhasil, cobalah mengganti dengan strategi yang lain.

4. **Tinjau Kembali dan Kembangkan**

Hal yang menarik dari langkah-langkah Polya ini adalah masih ada langkah keempat, walaupun sebenarnya kita telah mendapatkan solusi setelah selesai melakukan langkah ketiga. Setelah kita selesai melak-

sanakan strategi, menurut Polya, banyak hal yang dapat kita peroleh dengan meluangkan waktu untuk melihat kembali apa yang telah kita lakukan. Kita perlu melihat kembali apakah penyelesaian sudah sesuai dan tidak ada kontradiksi. Dengan melakukan hal ini, kita dapat belajar untuk memprediksi strategi apa yang dapat kita gunakan untuk memecahkan masalah-masalah berikutnya. Beberapa pertanyaan yang dapat menuntun kita dalam meninjau kembali adalah:

a. Apakah hasilnya sudah benar? Periksalah.
b. Dapatkah kita menginterpretasikan hasil tersebut?
c. Dapatkah kita menyederhanakan solusi yang telah kita buat?
d. Apakah ada cara lain untuk mendapatkan solusi yang sama?
e. Apakah kita dapat menyelesaikan dengan cara atau strategi yang lain?
f. Dapatkah kita menggeneralisasi (memperumum) hasil tersebut?

Dalam belajar matematika perlu ditekankan pula sikap tidak cepat puas akan solusi dari soal yang telah kita temukan. Jika solusi yang kita temukan belum membuat kita lega, berusahalah mencari solusi lain yang lebih elegan. Semakin banyak solusi yang kita temukan atas suatu permasalahan, semakin kita diperkaya akan cara memandang permasalahan tersebut dari berbagai sisi. Berkaitan dengan itu, ada beberapa permasalahan dalam buku ini yang tidak hanya dibahas dalam satu bagian, namun juga dibahas kembali dengan cara atau solusi berbeda dalam bab lain.

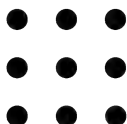
1.2 Berpikir Kreatif

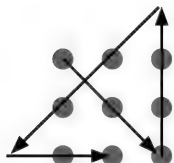
Salah satu tantangan terbesar kita dalam merancang strategi pemecahan masalah matematika adalah bagaimana kita harus berpikir kreatif. Penulis

ingin memberikan beberapa contoh masalah dan penyelesaiannya, untuk memberikan ilustrasi mengenai berpikir kreatif. Kita mulai dengan suatu teka-teki yang sudah sangat terkenal dan mungkin telah diketahui oleh sebagian besar dari kita.

Contoh 1.2.1

Nine dot problem

Hubungkan kesembilan titik berikut hanya dengan empat garis lurus tanpa mengangkat alat gambar dari kertas.

Jawab

Bagi mereka yang baru pertama kali melihat masalah ini, tampaknya masalah ini mustahil untuk diselesaikan. Minimal dibutuhkan lima garis lurus untuk dapat melalui kesembilan titik ini. Hal ini disebabkan karena kita mengasumsikan bahwa garis-garis harus digambarkan di dalam bentuk persegi dari kesembilan titik ini. Kita berpikir bahwa seakan-akan titik-titik terluar menjadi batas sehingga kita tidak boleh membuat garis yang keluar dari titik terluar. Jawaban dari permasalahan ini adalah sebagai berikut.

Masalah dalam contoh 1.2.1 di atas memperlihatkan suatu wawasan bagi kita bahwa asumsi-asumsi yang muncul dengan sendirinya di dalam benak kita dapat menjadi batas yang menghambat kita dalam memecahkan suatu masalah. Kita harus menyadari bahwa ide untuk menyelesaikan masalah tersebut justru berada di luar batas ini. Berikut akan diberikan dua contoh lain.

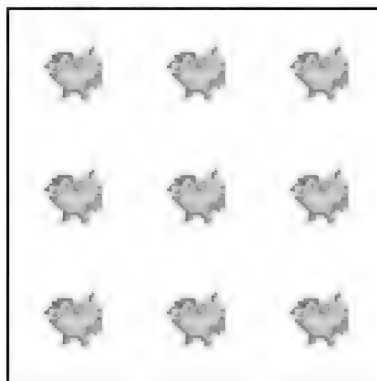
Contoh 1.2.2

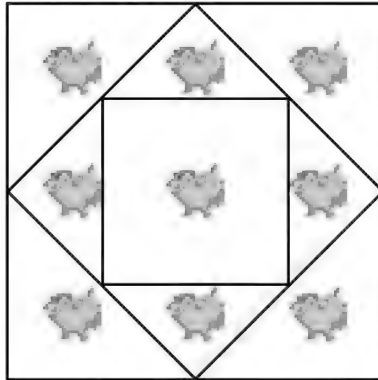
Kita memiliki enam batang korek api yang sama panjang. Tanpa memotong korek api tersebut, jelaskan bagaimana kita bisa menyusun keempat batang korek api tersebut sehingga membentuk empat buah segitiga yang berukuran sama.

Jawab

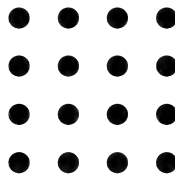
Para pembaca dapat mencoba pula permasalahan ini. Hasilnya, kita tidak akan mungkin dapat menyelesaikan permasalahan ini jika kita membatasi ruang berpikir kita hanya pada dimensi dua. Hal inilah yang menghambat kita. Jawaban dari permasalahan ini ada di dimensi tiga, yaitu kita menyusun keenam batang korek api tersebut menjadi sebuah limas segitiga beraturan.

Contoh 1.2.3

Sembilan ekor babi sedang berada di dalam sebuah persegi seperti pada gambar berikut. Buatlah dua buah persegi lain sehingga terbentuk sembilan daerah yang masing-masing hanya terisi seekor babi.

Jawab

Di sini, hal yang menghambat kita adalah kita mengasumsikan bahwa kedua persegi yang kita bentuk harus paralel dengan persegi luar. Kunci dari permasalahan ini adalah membuat persegi pertama yang titik-titik sudutnya merupakan titik tengah dari setiap sisi persegi luar, kemudian membuat persegi kedua yang titik-titik sudutnya merupakan titik tengah dari setiap sisi persegi kedua. Di sini tentu persegi pertama merupakan persegi yang tidak paralel dengan persegi luar.

Setelah memerhatikan beberapa contoh di atas, berikut akan diberikan beberapa masalah yang dapat melatih kita berpikir kreatif. Dalam subbab 3.4.6 nanti akan dibahas suatu strategi pemecahan masalah matematika yang benar-benar menuntut kita untuk berpikir kreatif. Di sana akan diberikan suatu ilustrasi yang menarik tentang seekor simpanse yang memiliki cara berpikir yang kreatif.

Soal

1.1 Hubungkan enam belas titik berikut hanya dengan enam garis lurus tanpa mengangkat alat gambar dari kertas.

1.2 Seseorang ingin membawa tongkat sepanjang 1,5 meter ke dalam sebuah pesawat, padahal peraturan dalam pesawat tersebut adalah tidak boleh membawa barang yang dimensi maksimumnya melebihi 1 meter. Apa yang harus ia lakukan?

1.3 Seseorang lahir pada tahun 1971 dan meninggal pada tahun 1924. Mengapa bisa demikian?

1.4 Di atas meja terdapat sebuah lilin kecil, korek api, dan kotak kecil berisi paku payung. Dengan menggunakan benda-benda tersebut, usahakan agar lilin menempel pada dinding dan nyalakan lilin tersebut.

1.5 Seseorang sedang terjebak di atas menara setinggi 10 meter dan ingin turun dari menara tersebut. Ia memiliki sebuah tali tebal sepanjang 5 meter dan sebuah pisau. Dengan memotong tali tersebut menjadi dua bagian lalu mengikatkannya, ternyata ia dapat turun dengan selamat. Bagaimana ia dapat melakukan hal ini?

BAB II
DASAR-DASAR BERHITUNG

Misalkan suatu kelas terdiri atas dua puluh orang siswa. Kita akan memilih tiga orang di antara mereka yang dianggap terbaik sebagai ketua, wakil, dan sekretaris kelas. Dalam hal ini, ada banyak kemungkinan pemilihan tersebut. Salah satu cara menentukan banyaknya kemungkinan pemilihan tersebut adalah dengan mencacah semua kasus satu demi satu, lalu menghitung ada berapa banyak kemungkinan yang ada. Tetapi itu tentu membutuhkan waktu yang lama.

Dalam bab ini kita akan berhadapan dengan masalah-masalah berhitung seperti di atas. Di sini kita akan belajar bagaimana kita menentukan banyak cara atau banyak kemungkinan yang dapat terjadi dalam suatu kasus tanpa mencacah semua kasus yang ada satu demi satu.

Permasalahan berhitung ini nantinya seringkali muncul dalam memecahkan masalah-masalah matematika. Oleh karena itu, pada bagian awal hal ini perlu dibahas sebagai prasyarat.

2.1 Aturan Perkalian dan Aturan Penjumlahan

Aturan perkalian dan aturan penjumlahan merupakan prinsip dasar yang melandasi semua teknik berhitung yang lain.

Perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan sebuah warung menawarkan 3 jenis makanan, yaitu bubur ayam, soto, dan bakso, serta 2 jenis minuman,

yaitu es sirup dan es teh. Jika kita bermaksud makan dan minum di warung ini dan memilih 1 makanan dan 1 minuman, maka kemungkinan-kemungkinan pilihan kita adalah sebagai berikut.

bubur ayam dan es sirup

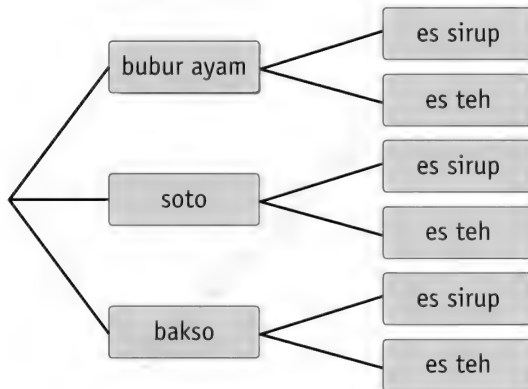
bubur ayam dan es teh

soto dan es sirup

soto dan es teh

bakso dan es sirup

bakso dan es teh

Cara sistematis untuk menuliskan kemungkinan-kemungkinan di atas adalah menggunakan diagram garpu seperti pada gambar di bawah.

Jadi, terdapat sebanyak 6 kemungkinan pilihan. Total banyaknya kemungkinan pilihan ini bisa diperoleh dengan cara mengalikan banyaknya jenis makanan dengan banyaknya jenis minuman yang dapat kita pilih. Teknik penghitungan seperti ini dinamakan aturan perkalian. Secara umum, aturan perkalian adalah sebagai berikut.

Aturan Perkalian

Jika sebuah proses dapat dibagi menjadi dua langkah yang dilakukan berurutan, dengan n_1 cara menyelesaikan langkah pertama dan n_2 cara menyelesaikan langkah kedua setelah langkah pertama terselesaikan, maka terdapat sebanyak $n_1 n_2$ cara menyelesaikan proses ini.

Pada perkembangan selanjutnya, tentu proses yang dimaksud tidak hanya dibagi menjadi dua langkah, namun dapat lebih dari dua langkah. Untuk itu, aturan perkalian ini diperumum menjadi sebagai berikut.

Perumuman Aturan Perkalian

Jika sebuah proses dapat dibagi menjadi k langkah yang dilakukan berurutan, dengan n_1 cara menyelesaikan langkah pertama dan n_i cara menyelesaikan langkah ke-i setelah langkah ke-$(i - 1)$ terselesaikan untuk setiap $i = 2,3,4,\ldots,k$, maka terdapat sebanyak $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ cara menyelesaikan proses ini.

Contoh 2.1.1

Terdapat 2 celana yang berwarna hitam dan biru, 4 baju berwarna kuning, merah, putih, dan ungu, serta 3 macam sepatu. Ada berapa banyak cara memilih pasangan warna celana, baju, dan sepatu tersebut?

Jawab

Proses memilih ini dapat dipecah menjadi tiga langkah, yaitu langkah pertama memilih jenis celana yang dapat dilakukan dengan 2 cara, langkah kedua memilih jenis baju yang dapat dilakukan dengan 4 cara, dan langkah ketiga memilih jenis sepatu yang dapat dilakukan dengan 3 cara.
Jadi, terdapat sebanyak $2 \times 4 \times 3 = 24$ cara memilih pasangan warna celana, baju, dan sepatu tersebut.

Soal

2.1 Suatu perusahaan *real estate* menawarkan kepada calon pembeli lima tipe rumah, tiga macam sistem pemanasan, dan dua bentuk garasi. Berapa macam rancangan rumah yang tersedia bagi calon pembeli?

Contoh 2.1.2

Kota A dan kota B terhubung oleh 3 jalur berbeda, sedangkan kota B dan kota C terhubung oleh 4 jalur berbeda.

a. Berapa banyak cara seseorang pergi dari kota A ke kota C melalui kota B?
b. Berapa banyak cara seseorang pergi dari kota A ke kota C melalui kota B, kemudian kembali lagi ke kota A tetapi tidak boleh melalui jalur yang sama seperti saat berangkat?

Jawab

a. Proses ini dapat dibagi menjadi dua langkah, yaitu langkah pertama memilih jalur dari kota A ke kota B yaitu sebanyak 3, dan langkah kedua memilih jalur dari kota B ke kota C yaitu sebanyak 4.

   Jadi, ada $3 \times 4 = 12$ cara seseorang pergi dari kota A ke kota C melalui kota B.

b. Kita telah mengetahui bahwa banyaknya cara berangkat adalah $3 \times 4 = 12$ cara. Kini kita tinggal menghitung banyaknya cara kembali. Untuk kembali dari kota C ke kota B terdapat 3 kemungkinan jalur yang dapat dilalui, sebab salah satu jalur sudah dilalui pada saat berangkat dan tidak boleh dilalui lagi. Demikian pula untuk kembali dari kota B ke kota A terdapat 2 kemungkinan jalur yang dapat dilalui, sebab salah satu jalur sudah dilalui pada saat berangkat dan tidak boleh dilalui lagi. Jadi, banyaknya cara ia kembali adalah $3 \times 2 = 6$ cara.

   Jadi, banyaknya cara pergi dan kembali adalah $12 \times 6 = 72$ cara.

Contoh 2.1.3

Andreas, Handi, Karin, dan Mega berada dalam sebuah stadion yang mempunyai 4 pintu keluar. Mereka akan keluar melalui pintu-pintu tersebut. Jika Mega harus keluar melalui pintu pertama, maka berapa banyak cara mereka keluar dari stadion?

Jawab

Pada kasus ini, Mega sudah ditentukan pilihannya, yaitu harus keluar melalui pintu pertama, maka Mega hanya memiliki 1 pilihan pintu keluar. Ketiga orang lainnya, yaitu Andreas, Handi, dan Karin, masing-masing memiliki 4 pilihan pintu keluar, yaitu pintu pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Jadi, banyaknya cara mereka keluar dari stadion adalah $1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$ cara.

Untuk mempermudah pengerjaan, kita dapat menggunakan kotak-kotak untuk menuliskan banyaknya kemungkinan yang ada. Setelah semua kotak terisi, kita kalikan semua bilangan yang ada dalam kotak-kotak tersebut. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.1.4

Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 akan dibentuk bilangan yang terdiri atas tiga digit. Tentukan banyaknya bilangan yang dapat dibuat jika:

a. Digit-digitnya boleh berulang.
b. Digit-digitnya tidak boleh berulang.
c. Digit-digitnya tidak boleh berulang dan bilangan itu ganjil.

Jawab

a. Karena digit-digitnya boleh berulang, maka masing-masing angka yang tersedia boleh menjadi digit ratusan, digit puluhan, atau digit satuan. Karena ada 5 angka yang tersedia, maka banyaknya kemungkinan setiap digit adalah 5.

ratusan	*puluhan*	*satuan*	*banyaknya bilangan*
5	5	5	$5 \times 5 \times 5 = 125$

Jadi, dapat dibuat 125 bilangan.

b. Karena digit-digitnya tidak boleh berulang, maka digit ratusan dapat dipilih dari 5 angka sembarang dari 5 angka yang tersedia. Digit puluhan dapat dipilih 4 angka sembarang dari 4 angka yang tersisa, karena satu di antaranya sudah digunakan untuk digit ratusan. Digit satuan dapat dipilih 3 angka sembarang dari 3 angka yang tersisa karena dua di antaranya sudah digunakan untuk digit ratusan dan puluhan.

ratusan	*puluhan*	*satuan*	*banyaknya bilangan*
5	4	3	$5 \times 4 \times 3 = 60$

Jadi, dapat dibuat 60 bilangan.

c. Ganjil atau genapnya suatu bilangan terlihat dari digit satuannya, maka digit satuan hanya dapat diisi oleh angka yang tersedia yang genap, yaitu 2 dan 4. Jadi, ada 2 pilihan untuk mengisi digit satuan. Angka yang tersisa adalah sebanyak 4, yang dapat digunakan untuk mengisi digit ratusan sebanyak 4 pilihan, dan digit puluhan sebanyak 3 pilihan, karena digit-digitnya tidak boleh berulang.

ratusan	*puluhan*	*satuan*	*banyaknya bilangan*
4	3	2	$4 \times 3 \times 2 = 24$

Jadi, dapat dibuat 24 bilangan.

Soal

2.2 Berapa banyak cara mengecat sisi-sisi limas segitiga beraturan jika setiap sisinya harus dicat dengan warna yang berbeda satu sama lain dan tersedia 6 warna cat?

2.3 Dalam suatu mal, Bella, Putri, Arif, Rina, dan Surya sedang berada di dalam sebuah lift yang turun dari lantai 6. Mereka akan turun di lantai 5, 4, 3, 2, atau 1. Jika Rina harus turun di lantai 4, maka tentukan banyaknya cara mereka turun dari lift.

2.4 Dalam audisi pencarian bakat tersisa lima kontestan. Masing-masing kontestan memiliki hak untuk lolos ke babak berikutnya karena tidak ada batasan banyaknya kontestan yang dapat lolos. Jika juri sudah menetapkan bahwa ada dua orang tertentu dari mereka yang pasti lolos, maka ada berapa banyak cara menentukan siapa saja dari kelima kontestan tersebut yang lolos?

2.5 Suatu ujian dalam bentuk pilihan ganda memuat 10 pertanyaan. Terdapat 4 kemungkinan jawaban untuk masing-masing pertanyaan. Hitunglah banyaknya cara seorang siswa dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan dalam ujian tersebut jika:

a. Siswa tersebut menjawab semua pertanyaan.
b. Siswa tersebut boleh tidak menjawab pertanyaan.

2.6 Berapa banyak cara enam siswa dapat duduk dalam dua baris terurut yang masing-masing barisnya terdiri atas tiga kursi jika:

a. Tidak ada batasan urutan duduk.
b. Salah satu siswa tertentu harus duduk di baris depan.

2.7 Sebuah organisasi terdiri dari empat orang pria dan lima orang wanita, akan dipilih ketua, wakil, sekretaris, dan bendahara. Berapa banyak cara pemilihan jika sekretaris selalu wanita?

2.8 Acara kuis "Berpacu dalam Hadiah" yang ditayangkan di stasiun TV menampilkan empat regu, yaitu regu A, B, C, dan D yang diatur ke samping berdasarkan abjad. Setiap regu terdiri dari tiga orang dan

semua peserta berjajar ke samping dalam satu baris lurus. Salah satu anggota dari setiap regu merupakan juru bicara. Berapa banyak susunan yang berbeda yang dapat dibuat jika juru bicara setiap regu harus selalu di tengah?

Selanjutnya, aturan perkalian dapat kita manfaatkan untuk menghitung banyaknya faktor dari suatu bilangan. Misalkan kita akan menentukan banyaknya faktor positif dari bilangan 360. Untuk memulainya, kita dapat mencoba mendaftar setiap faktor-faktor tersebut. Faktor-faktor tersebut adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Ternyata terdapat sebanyak 24 faktor. Jika kita perhatikan faktorisasi prima dari 360 yaitu $360 = 2^3 3^2 5^1$, maka kita dapat menyatakan setiap faktor di atas dalam bentuk $2^a 3^b 5^c$, dengan $a = 0,1,2,3$, $b = 0,1,2$, dan $c = 0,1$. Jadi, proses menghitung banyaknya faktor positif dari 360 dapat kita bagi menjadi tiga langkah. Langkah pertama adalah memilih pangkat dari 2, yang dapat dilakukan dalam 4 cara. Langkah kedua adalah memilih pangkat dari 3, yang dapat dilakukan dalam 3 cara. Langkah ketiga adalah memilih pangkat dari 5, yang dapat dilakukan dalam 2 cara. Jadi, banyaknya faktor positif dari 360 adalah $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Cara menghitung banyaknya faktor positif ini dapat kita perumum untuk sembarang bilangan asli n. Misalkan faktorisasi prima dari n adalah

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_k^{e_k}$$

dengan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima dan $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ adalah bilangan-bilangan asli.

Setiap faktor dari n dapat dinyatakan dalam bentuk $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$, dengan $a_1 = 0, 1, 2, \dots, e_1$, $a_2 = 0, 1, 2, \dots, e_2$, $a_3 = 0, 1, 2, \dots, e_3$, dan seterusnya sampai dengan $a_k = 0, 1, 2, \dots, e_k$. Jadi, proses menghitung banyaknya faktor positif dari n dapat kita bagi menjadi k langkah. Langkah pertama adalah memilih pangkat dari p_1, yang dapat dilakukan dalam $(e_1 + 1)$ cara. Langkah kedua adalah memilih pangkat dari p_2, yang dapat dilakukan dalam $(e_2 + 1)$ cara. Langkah ketiga adalah memilih pangkat dari p_3, yang dapat dilakukan dalam $(e_3 + 1)$ cara. Demikian seterusnya sampai dengan langkah ke-k yaitu memilih pangkat dari p_k, yang dapat dilakukan dalam $(e_k + 1)$ cara.

Jadi, banyaknya faktor positif dari n adalah $(e_1 + 1)(e_2 + 1)(e_3 + 1)\ldots(e_k + 1)$.

Jika n adalah bilangan asli yang memiliki faktorisasi prima

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

dengan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima dan $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ adalah bilangan-bilangan asli, maka banyaknya faktor positif dari n adalah

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1)(e_3 + 1)\ldots(e_k + 1)$$

Contoh 2.1.5

a. Tentukan banyaknya faktor positif dari 2520.
b. Tentukan banyaknya faktor positif genap dari 2520.
c. Tentukan banyaknya faktor positif ganjil dari 2520.

Jawab

a. Kita dapat memperlihatkan bahwa faktorisasi prima dari 2520 adalah

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$$

Jadi, banyaknya faktor positif dari 2520 adalah

$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

b. Setiap faktor positif genap dari 2520 dapat dinyatakan dalam bentuk $2^a 3^b 5^c 7^d$ dengan $a = 1, 2, 3$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1$, dan $d = 0, 1$. Karena ada 3 cara memilih a, 3 cara memilih b, 2 cara memilih c, dan 2 cara memilih d, maka banyaknya faktor positif genap dari 2520 adalah

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

c. Banyaknya faktor positif ganjil dari 2520 adalah banyaknya semua faktor positif dari 2520 dikurangi dengan banyaknya faktor positif yang genap. Jadi, banyaknya faktor positif ganjil dari 2520 adalah

$$48 - 36 = 12$$

Cara lain adalah menghitung banyaknya kemungkinan bentuk $2^a 3^b 5^c 7^d$ dengan $a = 0$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1$, dan $d = 0, 1$, yaitu sebanyak $1 \times 3 \times 2 \times 2 = 12$.

Soal

2.9 Hitunglah berapa banyak faktor positif berbeda yang dimiliki oleh bilangan:

a. $2^4 \times 3^6 \times 5 \times 7^3 \times 11^2$

b. 510510

c. 10^{10}

2.10 Hitunglah berapa banyak faktor dari bilangan 5040 yang:

a. Merupakan bilangan genap.

b. Merupakan bilangan ganjil.

c. Merupakan bilangan kelipatan 3.

d. Bukan merupakan kelipatan 3.

Selain menentukan banyaknya faktor positif, kita juga dapat menyelesaikan masalah berikut dengan aturan perkalian. Misalkan kita akan menentukan banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah 360. Cara menentukan banyaknya pasangan bilangan asli tersebut adalah sebagai berikut.

Perhatikan bahwa x dan y adalah faktor dari 360, dan kita mengetahui bahwa $360 = 2^3 3^2 5^1$, maka kita dapat menuliskan x dan y sebagai $x = 2^a 3^b 5^c$ dan $y = 2^d 3^e 5^f$. Nilai maksimum dari a dan d adalah 3, sehingga pasangan-pasangan (a, d) yang memungkinkan adalah (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (3, 0). Jadi, ada 7 kemungkinan pasangan (a, d). Dengan cara serupa diperoleh 5 kemungkinan pasangan (b, e) dan 3 kemungkinan pasangan (d, f). Jadi, menurut aturan perkalian, terdapat sebanyak $7 \times 5 \times 3 = 105$ pasangan bilangan asli (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah 360.

Cara menghitung banyaknya faktor positif ini dapat kita perumum untuk menentukan banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah n. Misalkan faktorisasi prima dari n adalah

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

dengan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima dan $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ adalah bilangan-bilangan asli.

Kita dapat menuliskan $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_k^{a_k}$ dan $y = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \ldots p_k^{b_k}$. Nilai maksimum dari a_i dan b_i adalah e_i, sehingga pasangan-pasangan (a_i, b_i) yang memungkinkan adalah $(0, e_i)$, $(1, e_i)$, $(2, e_i)$, ..., $(e_i - 1, e_i)$, (e_i, e_i), $(e_i, e_i - 1)$, ..., $(e_i, 2)$, $(e_i, 1)$, $(e_i, 0)$. Jadi, ada $2e_i + 1$ kemungkinan pasangan (a_i, b_i) untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Jadi, menurut aturan perkalian, terdapat sebanyak $(2e_1 + 1)(2e_2 + 1)(2e_3 + 1)\ldots(2e_k + 1)$ pasangan bilangan asli (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah n.

Jika n adalah bilangan asli yang memiliki faktorisasi prima

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

dengan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ adalah bilangan-bilangan prima dan $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ adalah bilangan-bilangan asli, maka banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga *KPK* dari x dan y adalah n adalah

$$(2e_1 + 1)(2e_2 + 1)(2e_3 + 1)\ldots(2e_k + 1)$$

Contoh 2.1.6

Berapa banyak pasangan bilangan asli (x, y) sehingga KPK dari x dan y adalah 6600?

Jawab

Kita dapat memperlihatkan bahwa faktorisasi prima dari 6600 adalah

$$6600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 11^1$$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli tersebut adalah

$$(2 \times 3 + 1)(2 \times 1 + 1)(2 \times 2 + 1)(2 \times 1 + 1) = 7 \times 3 \times 5 \times 3 = 315$$

Soal

2.11 Hitunglah berapa banyak pasangan bilangan asli (x, y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah 2640.

2.12 Hitunglah berapa banyak pasangan bilangan asli (x, y) dengan $x > y$ sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah 2640.

2.13 Hitunglah berapa banyak pasangan bilangan asli (x, y) dengan x dan y keduanya merupakan bilangan genap sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y adalah 2640.

Sekarang kita beralih ke aturan penjumlahan.

Perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan sebuah soal matematika dapat diselesaikan dalam 3 cara cepat dan 2 cara lambat, maka tentu terdapat 3 + 2 = 5 cara menyelesaikan soal matematika tersebut. Teknik menghitung ini disebut aturan penjumlahan. Secara umum, aturan penjumlahan adalah sebagai berikut.

Aturan Penjumlahan

Jika sebuah proses dapat dilakukan dalam satu dari n_1 cara atau satu dari n_2 cara, dengan tidak ada n_1 dan n_2 cara tersebut yang sama, maka terdapat sebanyak $n_1 + n_2$ cara menyelesaikan proses ini.

Seperti halnya aturan perkalian, aturan penjumlahan juga dapat diperumum untuk lebih dari dua macam cara.

Perumuman Aturan Penjumlahan

Jika sebuah proses dapat dilakukan dalam satu dari n_1 cara atau satu dari n_2 cara, dan seterusnya sampai satu dari n_k cara yang semuanya berbeda, maka terdapat sebanyak $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ cara menyelesaikan proses ini.

Contoh 2.1.7

Untuk menempuh perjalanan dari kota Surabaya ke kota Jogjakarta tersedia lima pilihan transportasi kereta api, dua pilihan maskapai penerbangan, dan tiga pilihan bus. Berapa banyak cara kita menempuh perjalanan tersebut?

Jawab

Terdapat 5 cara kita menempuh perjalanan tersebut dengan kereta api, 2 cara kita menempuh perjalanan tersebut dengan pesawat, dan 3 cara kita menempuh perjalanan tersebut dengan bus. Jadi, menurut aturan penjumlahan terdapat 5 + 2 + 3 = 10 cara kita menempuh perjalanan tersebut.

Selanjutnya marilah kita perhatikan kasus berikut. Misalkan dalam suatu kelas yang terdiri dari 30 orang siswa dilaksanakan survei yang terdiri atas dua pertanyaan yang harus dijawab. Pertanyaan pertama adalah jenis

kelamin dengan pilihan pria atau wanita dan pertanyaan kedua adalah pelajaran yang disukai dengan pilihan matematika atau fisika.

Misalkan hasil survei tersebut untuk pertanyaan pertama adalah 14 pria dan 16 wanita, sedangkan hasil survei untuk pertanyaan kedua adalah 22 orang menyukai matematika dan 15 orang menyukai fisika.

Perhatikan bahwa dalam pertanyaan pertama aturan penjumlahan dapat diterapkan. Kita melihat bahwa jumlah dari hasil survei tersebut yaitu $14 + 16 = 30$ sama dengan banyaknya siswa. Namun, kita tidak dapat menerapkan aturan penjumlahan dalam pertanyaan kedua. Menjumlahkan hasil survei tersebut akan mengakibatkan kelebihan penghitungan, yaitu $22 + 15 = 37$, padahal siswa yang mengikuti survei hanyalah 30 orang. Kelebihan ini, yaitu sebanyak 7, adalah banyaknya siswa yang menyukai kedua jenis pelajaran, yaitu matematika dan fisika.

Dengan demikian, jika $n(A_1)$ menyatakan banyaknya siswa yang menyukai matematika saja, $n(A_2)$ menyatakan banyaknya siswa yang menyukai fisika saja, dan $n(A_1 \cap A_2)$ menyatakan banyaknya siswa yang menyukai keduanya, maka

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

menyatakan banyaknya siswa seluruhnya. Cara menghitung seperti ini disebut *prinsip inklusi-eksklusi*.

Contoh 2.1.8

Suatu perusahaan menerima 350 berkas lamaran kerja. Misalkan 220 pelamar merupakan lulusan Teknik Informatika, 147 pelamar merupakan lulusan Ekonomi, dan 51 pelamar merupakan lulusan Teknik Informatika sekaligus Ekonomi. Berapa banyak pelamar yang bukan berasal dari Teknik Informatika maupun Ekonomi?

Jawab

Kita hitung dulu banyaknya pelamar yang merupakan lulusan Teknik Informatika atau Ekonomi atau keduanya, yaitu

$$220 + 147 - 51 = 316$$

Dengan demikian, ada sebanyak $350 - 316 = 34$ pelamar yang bukan lulusan Teknik Informatika maupun Ekonomi.

Soal

2.14 Misalkan 105 orang siswa mengikuti ujian. Di antara mereka, ada sebanyak 80 orang yang lulus ujian Bahasa Inggris dan 75 orang yang lulus ujian Matematika. Jika ada 60 orang yang lulus kedua ujian itu, maka berapa banyak siswa yang gagal di kedua ujian itu?

2.15 Sepuluh huruf berbeda $A, B, C, D, G, H, O, P, R,$ dan S akan disusun menjadi sebuah kata yang tidak harus mempunyai arti. Berapa banyak cara membentuk kata yang tidak memuat deretan huruf "*CAR*" maupun "*DOG*"?

2.16 Berapa banyak bilangan bulat positif yang merupakan faktor dari minimal salah satu dari bilangan 10^{40}, 50^{100}?

2.17 Berapa banyak bilangan bulat positif yang merupakan faktor dari minimal salah satu dari bilangan 12^{50}, 45^{20}, 50^{100}?

Prinsip inklusi-eksklusi ini tentu tidak terbatas pada dua himpunan. Untuk tiga himpunan A_1, A_2, dan A_3 berlaku

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Hal ini dapat dibuktikan dengan memanfaatkan prinsip inklusi-eksklusi untuk dua himpunan, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= n[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] \\
&= n(A_1 \cup A_2) + n(A_3) - n[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \\
&= n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) + n(A_3) - n[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \\
&= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - [n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3) - n[(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)]] \\
&= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

Di sini kita telah menggunakan sifat himpunan

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$$

dan tentunya

$$(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Para pembaca dapat memperlihatkan pula untuk empat himpunan A_1, A_2, A_3, dan A_4 berlaku

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) \\ &- n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Prinsip inklusi-eksklusi ini selanjutnya dapat diperumum untuk n himpunan dengan melihat bahwa dalam pola di atas, irisan dari 1 dan 3 himpunan bertanda positif, sedangkan irisan dari 2 dan 4 himpunan bertanda negatif. Secara umum, irisan dari sebanyak ganjil himpunan bertanda positif, sedangkan irisan dari sebanyak genap himpunan bertanda negatif. Jadi, untuk n himpunan A_1, A_2, ..., dan A_n, dengan $n \geq 2$, berlaku

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \underbrace{n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_n)}_{\text{1 himpunan}} \\ &\underbrace{- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{n-1} \cap A_n)}_{\text{2 himpunan}} + \ldots + \underbrace{(-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}_{n \text{ himpunan}} \end{aligned}$$

Bukti untuk hal ini ditunda sampai pada pembahasan tentang induksi matematika pada bab selanjutnya, yaitu dalam contoh 3.3.2.3.

Soal

2.18 Di sebuah kantin, hasil survei terhadap 100 orang pembeli hot dog adalah sebagai berikut. Sebanyak 39 orang memesan hot dog dengan mayonaise, 34 orang memesan hot dog dengan keju, 42 orang memesan hot dog dengan saos tomat, 10 orang memesan hot dog dengan mayonaise dan keju, 11 orang memesan hot dog dengan keju dan saos tomat, dan 12 orang memesan hot dog dengan mayonaise dan saos tomat. Jika ada 14 orang yang memesan hot dog tanpa mayonaise, keju, dan saos tomat, maka berapa banyak orang yang memesan hot dog dengan mayonaise, keju, dan saos tomat?

2.19 Ada berapa banyak bilangan 10 digit yang tidak mengandung angka-angka berulang dengan syarat dimulai dengan digit 987, atau memuat digit '45' di posisi kelima dan keenam, atau diakhiri dengan digit 123?

Dalam penerapannya, seringkali diperlukan penggunaan aturan perkalian dan aturan penjumlahan sekaligus. Dalam hal ini kita perlu memerhatikan kapan kita harus menggunakan aturan perkalian dan kapan kita harus menggunakan aturan penjumlahan. Pada umumnya, aturan perkalian ditandai dengan kata hubung "dan" sedangkan aturan penjumlahan ditandai dengan kata hubung "atau". Namun kata-kata hubung ini terkadang tidak muncul secara eksplisit dalam permasalahan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.1.9

Akan dibuat kode-kode rahasia yang terdiri dari 3 sampai 5 angka. Setiap kode harus memuat paling sedikit sebuah angka nol. Berapa banyak kode rahasia yang dapat dibuat?

Jawab

Di sini kode rahasia yang dimaksud dapat terdiri dari 3 angka, 4 angka, atau 5 angka. Untuk setiap kemungkinan banyaknya angka kode tersebut, kode harus memuat paling sedikit sebuah angka nol. Untuk menghitungnya, kita menghitung banyaknya kemungkinan semua kode dikurangi dengan banyaknya kemungkinan kode yang tidak memuat angka nol. Untuk kemungkinan semua kode, banyaknya pilihan setiap angka adalah 10, sedangkan untuk kode yang tidak memuat angka nol, banyaknya pilihan setiap angka adalah 9 sebab angka nol tidak boleh dipilih. Cara ini kita lakukan untuk kode 3 angka, 4 angka, dan 5 angka, sehingga kita memperoleh

$$(10^3 - 9^3) + (10^4 - 9^4) + (10^5 - 9^5) = 44661$$

kemungkinan kode rahasia yang bisa dibuat.

Soal

2.20 Dari angka-angka 1, 2, 5, 6, 8, 9 akan disusun bilangan-bilangan yang terdiri atas tiga digit berbeda. Tentukan banyaknya bilangan yang bisa dibuat jika:

a. Tidak ada batasan.

b. Bilangan tersebut ganjil.
c. Bilangan tersebut harus kelipatan 5.
d. Bilangan tersebut harus kurang dari 600.
e. Bilangan tersebut harus genap dan kurang dari 600.
f. Bilangan tersebut harus genap atau kurang dari 600.
g. Bilangan tersebut lebih dari 162 dan kurang dari 915.
h. Digit genap dan ganjil berselingan.

2.21 Berapa banyak bilangan-bilangan yang paling banyak terdiri dari 3 angka berlainan dan ganjil yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2.22 Luky melupakan sebuah kode yang terdiri atas 3 digit pada kopernya (semua digitnya dari 0 hingga 9). Ia ingat bahwa digit pertama kurang dari 5, digit kedua ganjil, dan digit ketiga adalah 7 atau 8. Bila tidak ada digit yang berulang, berapa banyaknya kemungkinan kode tersebut?

Petunjuk : Hitung dulu semua kemungkinan, lalu dikurangi dengan yang memiliki digit berulang.

2.23 Seorang korban kecelakaan tabrak lari menginformasikan kepada polisi bahwa plat nomor dari mobil yang menabraknya memiliki tiga huruf yang diikuti tiga digit, diawali dengan huruf-huruf "*AS*", dan memiliki digit 1 dan 2. Berapa banyak kemungkinan plat nomor yang memenuhi kriteria ini?

2.24 Tiga huruf diambil secara acak dari kata *MELATI*, lalu disusun. Tentukan banyaknya susunan huruf tersebut yang huruf pertama atau terakhir tetapi tidak keduanya merupakan huruf vokal.

2.25 Terdapat empat pasangan suami istri yang akan duduk pada sebuah bangku panjang. Ada berapa banyak cara mereka duduk jika:
a. Tidak ada batasan urutan duduk.
b. Yang berjenis kelamin sama selalu berdampingan.
c. Hanya laki-laki yang berdampingan.

d. Dua laki-laki duduk di sebelah kiri dan dua laki-laki yang lain di sebelah kanan.

e. Seorang laki-laki tertentu duduk di pinggir.

2.26 Suatu nomor perdana terdiri dari 11 digit, diawali dengan 0817. Tujuh digit sisa harus saling berbeda, tidak memuat angka nol, dan diawali dengan digit. Berapa banyaknya nomor perdana yang bisa dibentuk jika untuk enam digit terakhir nomor genap dan ganjil saling berselingan?

2.27 Akan dibuat plat nomor kendaraan dimulai dengan huruf A, diikuti empat angka dengan angka pertama bukan nol, dan diakhiri dengan dua huruf konsonan. Ada berapa variasi nomor yang dapat dibuat jika yang memuat bilangan 13 tidak disertakan?

2.2 Permutasi

Misalkan terdapat n orang yang sedang berbaris, dan kita diminta menghitung banyaknya susunan barisan orang-orang tersebut. Kita dapat menggunakan aturan perkalian dan memandangnya dengan cara sebagai berikut. Posisi pertama dapat ditempati oleh n orang, posisi kedua dapat ditempati oleh $(n - 1)$ orang selain yang telah menempati posisi pertama, posisi ketiga dapat ditempati oleh $(n - 2)$ orang selain yang telah menempati posisi pertama dan kedua, demikian seterusnya sampai dengan posisi ke-n dapat ditempati oleh 1 orang yang tersisa. Jadi, berdasarkan aturan perkalian, banyaknya susunan barisan orang-orang tersebut adalah

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Kini marilah kita mendefinisikan suatu fungsi baru yang mengekspresikan penghitungan ini. Fungsi ini dinamakan *faktorial*.

Faktorial

Untuk setiap bilangan asli n, "$n!$" didefinisikan sebagai n *faktorial*, dengan

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Sebagai contoh, banyaknya susunan barisan jika terdapat 5 orang yang sedang berbaris adalah

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

susunan.

Sekarang kita perhatikan kembali konsep aturan perkalian dalam ilustrasi berikut. Misalkan kita akan menghitung banyaknya cara menyusun angka-angka 0, 1, 2, 3, ..., 9 membentuk sebuah kode yang terdiri atas dua angka berbeda. Untuk itu, mula-mula kita harus mengisi angka pertama dari kode tersebut. Untuk mengisi angka pertama ini kita mempunyai 10 pilihan, yaitu 0, 1, 2, 3, ..., 9. Setelah angka pertama terisi dengan salah satu angka di antaranya, kini kita memiliki 9 pilihan yang tersisa untuk mengisi angka kedua. Dari sini kita memperoleh banyaknya cara membentuk sebuah kode yang terdiri atas dua angka berbeda adalah

$$10 \times 9 = 90 \text{ cara.}$$

Kini marilah kita mengembangkan kasus ini. Misalkan kode yang harus kita susun terdiri atas tiga angka berbeda. Untuk mengisi angka pertama kita mempunyai 10 pilihan, untuk mengisi angka kedua kita mempunyai 9 pilihan, dan untuk mengisi angka ketiga kita mempunyai 8 pilihan. Jadi, banyaknya cara membentuk sebuah kode yang terdiri atas tiga angka berbeda adalah

$$10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ cara.}$$

Jika kita mengembangkannya untuk kode yang terdiri atas empat angka berbeda, tentu kita akan mendapatkan hasil

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ cara.}$$

Apa yang dapat kita simpulkan dari permasalahan ini? Misalkan tersedia sebanyak n angka berbeda, dan kita diminta membentuk kode yang terdiri atas r angka berbeda, maka banyaknya cara kita melakukan hal ini adalah

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - r + 1)$$

Hasil ini mudah kita dapatkan dengan cara yang sama seperti pada ilustrasi di atas. Selanjutnya kita dapat menuliskan bentuk ini sebagai

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kini marilah kita memperkenalkan suatu notasi untuk melambangkan bentuk ini. Bentuk ini kita gunakan untuk menghitung banyaknya susunan terurut dari r objek yang dipilih dari n objek, yang disebut *permutasi*. Banyaknya permutasi r objek dari n objek selanjutnya kita notasikan sebagai $P(n,r)$.

Permutasi dengan Semua Unsur Berbeda

Banyaknya permutasi r objek yang dipilih dari n objek dengan $r \leq n$ adalah

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Hal ini berlaku untuk $r \leq n$. Pada kasus khusus, bagaimana jika kita banyaknya objek yang dipilih sama dengan banyaknya objek yang tersedia? Jika ini terjadi maka penghitungan kita adalah

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Jika banyaknya objek yang dipilih sama dengan banyaknya objek yang tersedia, maka pada dasarnya kita tinggal mengurutkan objek-objek tersebut. Ingatlah kembali mengenai masalah susunan barisan n orang di atas, di mana kita temukan bahwa banyaknya susunan barisan adalah $n!$. Jadi kita memperoleh

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

Untuk itu kita mendefinisikan

$$\boxed{0! = 1}$$

Untuk penggunaan permutasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.2.1

Seseorang diminta untuk memilih tiga macam lukisan dari delapan lukisan yang tersedia untuk ditata berurutan di dinding. Berapa banyak cara melakukan hal ini?

Jawab

Masalah ini merupakan masalah permutasi, yaitu menghitung banyaknya susunan terurut dari 3 lukisan yang dipilih dari 8 lukisan, maka banyak cara melakukan hal ini adalah

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Jadi, ada 336 cara memilih lukisan tersebut.

Contoh 2.2.2

Dari tiga lembar kain yang ukurannya sama, hanya warnanya yang berlainan, akan dibentuk sebuah bendera. Ada berapa macam bendera yang bisa dibuat jika bendera terdiri atas paling sedikit dua lembar kain?

Jawab

Kemungkinan yang ada adalah bendera yang dibuat terdiri atas dua lembar kain atau tiga lembar kain dan dipilih dari tiga lembar kain yang tersedia, maka

$$P(3,2)+P(3,3)=\frac{3!}{(3-2)!}+\frac{3!}{(3-3)!}=\frac{3!}{1!}+\frac{3!}{0!}=6+6=12$$

Jadi, ada 12 macam bendera yang bisa dibuat.

Soal

2.28 Dari 13 karyawan yang potensial akan dipilih 2 karyawan untuk menempati jabatan direktur dan wakil direktur. Berapa macam komposisi karyawan yang mungkin untuk menempati jabatan tersebut?

2.29 Dalam setiap perjalanan, seorang salesman mengunjungi 4 kota dari 12 kota di wilayahnya. Dalam berapa banyak cara dia dapat menjadwalkan rute yang ditempuhnya?

2.30 Dalam berapa cara tujuh buku yang berbeda dapat disusun pada sebuah rak buku, sehingga:

a. Tiga buku tertentu selalu berdampingan.

b. Tiga buku tertentu tidak pernah berdampingan.

2.31 Sebuah mobil besar digunakan untuk piknik. Akan ada enam orang yang duduk di enam kursi dalam mobil tersebut, salah satunya adalah kursi pengemudi. Jika yang boleh duduk di kursi pengemudi hanyalah dua orang di antara mereka yang memiliki SIM, maka berapa banyak susunan duduk mereka?

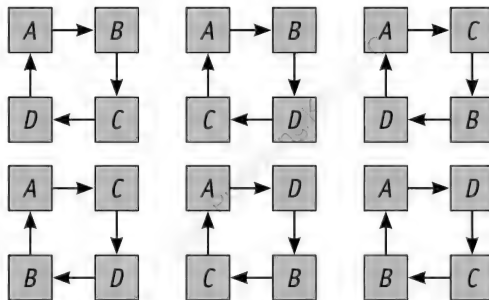
2.32 Dari lima grup band yang merupakan finalis sebuah lomba band akan dipilih tiga grup sebagai juara I, II, dan III, satu grup favorit, serta

satu personel terbaik. Jika ketiga grup yang menjadi juara dapat pula menjadi grup favorit dan setiap grup terdiri atas lima orang personel, maka tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut.

2.3 Permutasi Siklis

Dengan faktorial yang telah dibahas di atas kita dapat menghitung banyaknya cara empat orang duduk di bangku memanjang. Tentu banyaknya cara tersebut adalah

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Permasalahan yang timbul pada permutasi siklis (permutasi sirkular) adalah bagaimana kita menghitung banyaknya cara keempat orang tersebut duduk di bangku yang melingkar. Misalkan keempat orang tersebut adalah *A*, *B*, *C*, dan *D*, maka semua susunan yang mungkin adalah sebagai berikut.

Terdapat 6 susunan berbeda. Dari keenam susunan ini kita dapat memerhatikan bahwa untuk mendaftar susunan-susunan tersebut, kita cukup menukar posisi *B*, *C*, dan *D*, sehingga banyaknya susunan adalah $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ susunan.

Cara lain untuk memandang banyaknya susunan ini adalah dengan membandingkannya dengan faktorial biasa. Misalkan banyaknya susunan pada bangku yang melingkar di atas adalah *P*, maka untuk memperoleh susunan-susunan pada bangku memanjang dapat dilakukan dalam dua langkah. Langkah pertama adalah memilih salah satu kemungkinan susunan pada permutasi siklis tersebut, ada *P* cara memilih susunan ini. Setelah itu, langkah kedua adalah kita menghapus salah satu panah yang ada pada susunan yang telah kita pilih, sehingga apabila kita bentangkan, susunan

tersebut akan menjadi memanjang. Karena terdapat 4 panah, maka ada 4 cara menghapus salah satu panah tersebut. Jadi, menurut aturan perkalian, banyaknya susunan pada bangku memanjang menurut penghitungan ini adalah $P \times 4$. Padahal kita mengetahui bahwa menurut faktorial biasa, banyaknya susunan pada bangku memanjang adalah $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Jadi, kita memperoleh persamaan

$$P \times 4 = 24$$

$$\Leftrightarrow \quad P = \frac{24}{4} = 6$$

Gagasan di atas berlaku secara umum yaitu jika terdapat n objek. Kita misalkan banyaknya susunan pada bangku melingkar di atas adalah P. Kemudian kita lakukan langkah pertama yaitu memilih salah satu kemungkinan susunan pada permutasi siklis tersebut, ada P cara memilih susunan ini. Kemudian langkah kedua yaitu menghapus salah satu panah yang ada pada susunan tersebut. Karena terdapat n objek maka terdapat n panah, sehingga ada n cara menghapus salah satu panah tersebut. Jadi, menurut aturan perkalian, banyaknya susunan pada bangku memanjang menurut penghitungan ini adalah $P \times n$. Padahal dengan faktorial biasa kita memperoleh banyaknya susunan pada bangku memanjang adalah $n!$. Jadi, kita memperoleh persamaan

$$P \times n = n!$$

$$\Leftrightarrow \quad P = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Permutasi Siklis

Banyaknya permutasi siklis dari n objek adalah

$$P = (n - 1)!$$

Contoh 2.3.1

Tiga pasang pria dan wanita yang merupakan pasangan suami istri duduk pada enam kursi dengan susunan melingkar.

a. Berapa banyaknya susunan duduk mereka?

b. Berapa banyaknya susunan duduk mereka, jika ketiga orang wanita selalu duduk berdekatan?

c. Berapa banyaknya susunan duduk mereka, jika pria dan wanita duduk saling berselingan?
d. Berapa banyaknya susunan duduk mereka, jika setiap suami harus duduk berdampingan dengan istrinya?

Jawab

a. Banyaknya susunan duduk mereka adalah banyaknya permutasi siklis dari 6 objek, yaitu

$$P = (6 - 1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Jadi, ada 120 susunan duduk mereka.

b. Jika ketiga orang wanita selalu duduk berdekatan, maka kita dapat membagi proses penempatan ini dalam dua langkah. Dalam langkah pertama kita menganggap ketiga orang wanita tersebut sebagai satu objek. Jadi, bersama dengan tiga orang pria yang lain (yang tidak harus berdekatan), kita menghitung banyaknya permutasi siklis dari empat objek, yaitu sebanyak $(4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Langkah kedua adalah kita menghitung banyaknya urutan duduk dari ketiga wanita yang berdekatan tersebut, yaitu sebanyak $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Jadi, menurut aturan perkalian terdapat $6 \times 6 = 36$ susunan.

c. Jika mereka duduk saling berselingan pria dan wanita, maka kita juga dapat membagi proses penempatan ini dalam dua langkah. Langkah pertama adalah menempatkan tiga pria yang ada. Terdapat $(3 - 1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$ susunan duduk ketiga pria ini. Langkah kedua, kita menempatkan tiga wanita yang ada. Banyaknya cara penempatan ketiga wanita ini adalah $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Jadi, menurut aturan perkalian terdapat $2 \times 6 = 12$ susunan.

d. Kita bagi proses penempatan ini dalam dua langkah. Dalam langkah pertama, setiap pasangan suami istri kita anggap sebagai satu objek. Jadi, kita menghitung banyaknya permutasi dari tiga objek, yaitu sebanyak $(3 - 1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$. Langkah kedua, kita perhatikan bahwa setiap pasangan suami istri memiliki 2 posisi, yaitu suami-istri atau istri-suami. Karena terdapat 3 pasang suami istri, maka ada $2 \times 2 \times 2 = 8$ susunan. Jadi, menurut aturan perkalian terdapat $2 \times 8 = 16$ susunan.

Contoh 2.3.2

Lima manik-manik berwarna warni akan dirangkai menjadi sebuah kalung. Tentukan berapa banyak cara merangkai manik-manik tersebut.

Jawab

Susunan siklis manik-manik pada kalung merupakan susunan melingkar yang tidak memerhatikan arah putaran. Lain halnya dengan permutasi siklis biasa yang memerhatikan arah putaran. Oleh karena itu, banyaknya susunan siklis dari manik-manik pada kalung adalah setengah dari permutasi siklis biasa.

$$P = \frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

Jadi, ada 12 cara merangkai manik-manik tersebut.

Soal

2.33 Terdapat 10 satelit buatan dalam satu orbit yang sama dan berbentuk lingkaran. Jarak sebuah satelit dengan satelit lainnya adalah sama. Tentukan banyak cara 10 satelit tersebut menempati posisinya dalam orbit.

2.34 Berapa banyaknya cara merangkai empat manik-manik merah dan tiga manik-manik hijau membentuk sebuah kalung, jika:

a. Susunannya bebas.
b. Semua manik-manik hijau harus berdekatan.

2.35 Sebuah keluarga inti dengan empat anak, yaitu dua anak laki-laki dan dua anak perempuan, makan bersama mengelilingi meja bundar. Tentukan banyaknya cara mereka duduk, jika:

a. Tidak ada batasan.
b. Ayah dan ibu harus duduk berdampingan.
c. Seorang anak tertentu selalu diapit ayah dan ibu.
d. Berselingan menurut jenis kelamin.

2.36 Tentukan banyaknya cara 8 bunga yang berbeda dapat disusun membentuk sebuah rangkaian bunga yang melingkar jika 4 bunga tertentu tidak boleh berdampingan.

2.4 Kombinasi

Lain halnya dengan permutasi yang menyatakan banyaknya susunan terurut, *kombinasi* menyatakan banyaknya susunan tak terurut. Kita menotasikan banyaknya kombinasi r objek yang dipilih dari n objek sebagai $C(n,r)$.

Perhatikan ilustrasi berikut. Pada bagian sebelumnya kita telah menemukan bahwa untuk memilih r objek dari n objek sekaligus mengurutkannya diperlukan sebanyak $P(n,r)$ cara. Proses pemilihan ini dapat pula kita pilah dalam dua langkah. Langkah pertama adalah memilih r objek dari n objek tanpa mengurutkannya, yang dapat kita lakukan sebanyak $C(n,r)$ cara. Langkah kedua adalah mengurutkan r objek yang telah kita pilih, yaitu sebanyak $P(r,r)$ cara. Jadi, menurut aturan perkalian kita dapat menuliskan

$$P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r)$$

Akibatnya kita memperoleh

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-r)!} = C(n,r) \times \frac{r!}{(r-r)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-r)!} = C(n,r) \times \frac{r!}{0!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r)$$

Jadi, banyaknya kombinasi r objek dari n objek adalah

Kombinasi dengan Semua Unsur Berbeda

Banyaknya kombinasi r objek yang dipilih dari n objek dengan $r \leq n$ adalah

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Untuk penggunaan kombinasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.4.1

Berapa banyak cara memilih 4 kartu remi secara acak dari setumpuk kartu remi lengkap yang terdiri atas 52 kartu?

Jawab

Masalah ini merupakan masalah kombinasi, yaitu memilih 4 kartu dari 52 kartu tanpa mengurutkan, maka banyak cara melakukan hal ini adalah

$$C(52,4) = \frac{52!}{(52-4)!4!} = \frac{52!}{48!4!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48!}{48! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2} = 270725$$

Jadi, ada 270725 cara memilih kartu remi tersebut.

Soal

2.37 Jika tersedia 15 titik dengan tidak ada 3 titik yang segaris, tentukan:

a. Berapa banyak garis yang bisa dibuat?

b. Berapa banyak segitiga yang bisa dibuat?

2.38 Berapa banyak diagonal yang dapat dibuat pada sebuah bangun segi-28 beraturan?

2.39 Terdapat dua garis sejajar. Pada garis pertama terletak dua titik A dan B, sedangkan pada garis kedua terletak sepuluh titik.

a. Berapa banyak segitiga yang dapat dibuat jika titik-titik sudutnya dipilih dari keduabelas titik tersebut?

b. Berapa banyak di antara segitiga-segitiga ini yang memiliki titik A sebagai salah satu titik sudutnya?

2.40 Tiga puluh orang yang hadir dalam sebuah rapat berjabat tangan satu sama lain. Berapa banyak jabat tangan yang dapat terjadi?

2.41 Lima pasang suami istri hadir dalam sebuah rapat. Mereka berjabat tangan satu sama lain, tetapi setiap suami tidak berjabat tangan dengan istrinya sendiri. Berapa banyak jabat tangan yang dapat terjadi?

2.42 Terdapat enam botol cat air dengan warna berbeda-beda. Berapa banyak warna baru yang dapat dibuat jika kita mencampurkan paling banyak tiga warna cat tersebut?

2.43 Dalam berapa cara 6 ekor sapi dapat diberikan kepada Pak Tarmin dan Pak Timin, sehingga salah seorang memperoleh 4 ekor dan yang lain memperoleh 2 ekor?

2.44 Suatu satuan angkatan darat yang akan menyerbu suatu daerah lawan terdiri dari 10 orang. Agar serangannya berhasil dengan baik, maka rombongan ini dibagi menjadi 3 regu. Regu pertama 3 orang, regu kedua 5 orang, dan sisanya regu ketiga. Ada berapa cara pembagian regu tersebut?

2.45 Dari 10 siswa yang lulus seleksi olimpiade matematika, akan dibentuk 3 tim untuk mengikuti kejuaraan. Tim pertama terdiri atas 5 orang mengikuti kejuaraan di Unair, tim kedua terdiri atas 3 orang mengikuti kejuaraan di ITS, dan 2 orang mengikuti kejuaraan di tingkat kota. Jika satu siswa dari 10 siswa di atas yang bernama Jeni selalu mengikuti kejuaraan tingkat kota, berapa banyaknya komposisi tim Matematika tersebut?

2.46 Terdapat 12 buku cerita yang akan dibagikan kepada 3 orang anak. Tentukan banyaknya cara membagikan buku-buku tersebut jika:

a. Setiap anak memperoleh 4 buku.

b. Seorang anak tertentu memperoleh 3 buku, seorang yang lain 4 buku, dan yang lain 5 buku.

2.47 Lima belas anak akan pergi berkemah bersama menggunakan tiga buah mobil yang kapasitasnya masing-masing enam orang, lima orang, dan empat orang.

a. Ada berapa cara yang dapat dilakukan untuk membagi anak-anak ke dalam tiga mobil tersebut?

b. Jika seorang dari mereka tidak bisa ikut karena sakit, ada berapa cara untuk membagi ke dalam tiga mobil tersebut?

Contoh 2.4.2

Dalam sebuah kantong terdapat 5 kelereng coklat dan 5 kelereng kuning. Akan diambil 2 kelereng secara acak. Berapa banyak cara pengambilan, jika kelereng yang diambil harus keduanya coklat dan pengambilan dilakukan:

a. 2 kelereng sekaligus.
b. Satu demi satu dengan pengembalian.
c. Satu demi satu tanpa pengembalian.

Jawab

a. Jika diambil 2 kelereng sekaligus dan diminta harus keduanya coklat, maka kita mengambil 2 kelereng coklat dari 5 kelereng coklat yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$$

Jadi, ada 10 cara pengambilan.

b. Terlihat bahwa proses pengambilan ini dapat dipilah menjadi dua langkah. Langkah pertama adalah pengambilan pertama, yaitu mengambil 1 kelereng coklat dari 5 kelereng coklat yang tersedia. Setelah itu kelereng yang terambil dikembalikan, kemudian langkah kedua adalah pengambilan kedua, yaitu mengambil 1 kelereng coklat dari 5 kelereng coklat yang tersedia. Maka menurut aturan perkalian, banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,1) \times C(5,1) = \frac{5!}{(5-1)!1!} \times \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{5!}{4!1!} \times \frac{5!}{4!1!}$$

$$= \frac{5 \times 4!}{4!} \times \frac{5 \times 4!}{4!} = 25$$

Jadi, ada 25 cara pengambilan.

c. Sama seperti sebelumnya, proses pengambilan ini dapat dipilah menjadi dua langkah. Langkah pertama adalah pengambilan pertama, yaitu mengambil 1 kelereng coklat dari 5 kelereng coklat yang tersedia. Namun, setelah itu kelereng yang terambil tidak dikembalikan, maka langkah kedua adalah pengambilan kedua, yaitu mengambil 1 kelereng coklat dari 4 kelereng coklat yang tersisa. Maka menurut aturan perkalian, banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,1) \times C(4,1) = \frac{5!}{(5-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{5!}{4!1!} \times \frac{4!}{3!1!}$$

$$= \frac{5 \times 4!}{4!} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 20$$

Jadi, ada 20 cara pengambilan.

Contoh 2.4.3

Dalam suatu kotak terdapat 5 bola merah, 2 bola kuning, dan 4 bola hijau. Diambil 3 bola sekaligus secara acak. Berapa banyaknya cara pengambilan, jika bola yang terambil tidak ketiganya hijau?

Jawab

Menghitung banyaknya cara pengambilan bola yang tidak ketiganya hijau sama dengan menghitung banyaknya semua cara pengambilan dikurangi dengan banyaknya cara pengambilan bola yang ketiga-tiganya hijau, maka didapatkan

$$C(11,3)-C(4,3)=\frac{11!}{8!3!}-\frac{4!}{1!3!}=\frac{11\times10\times9\times8!}{8!\times3\times2\times1}-\frac{4\times3!}{3!}=165-4=161$$

Jadi, ada 161 cara pengambilan.

Soal

2.48 Sebuah kolam berisi lima ekor ikan lele, empat ekor ikan koi, dan tiga ekor ikan nila. Jika seseorang memancing ikan sebanyak dua kali, tentukan banyaknya cara memperoleh dua ikan dengan jenis yang sama.

2.49 Dalam sebuah peti terdapat dua buah jeruk, empat buah apel, dan lima buah pir. Jika diambil tiga buah sekaligus secara acak, tentukan banyaknya cara terambilnya:

a. Tiga buah yang tidak semuanya apel.

b. Ketiga-tiganya berbeda jenis buah.

2.50 Sebuah kotak berisi tujuh bola lampu, tiga di antaranya rusak. Secara acak akan diambil dua bola lampu satu per satu tanpa pengembalian. Berapa banyaknya cara pengambilan jika hanya salah satu lampu yang terambil rusak?

2.51 Dari 6 pasang suami istri, berapa banyak cara memilih suatu komite yang terdiri dari:

a. 3 pria dan 4 wanita.

b. 4 orang, di mana paling sedikit ada satu wanita.

c. 4 orang, di mana paling banyak ada dua pria.
d. 4 orang, di mana masing-masing jenis kelamin terwakilkan.
e. 4 orang, di mana dua anggota tertentu tidak boleh dipilih.
f. 4 orang, di mana dua anggota tertentu tidak boleh terpilih sekaligus.
g. 4 orang, di mana tidak boleh ada pasangan suami istri yang terpilih.

Contoh 2.4.4

Dari 6 orang putra dan 6 orang putri akan dipilih 4 orang untuk membentuk sebuah tim panitia memorabilia. Jika disyaratkan dalam tim tersebut paling banyak 3 orang putra, maka berapa banyak cara melakukan pemilihan tersebut?

Jawab

Karena disyaratkan paling banyak 3 orang putra, maka kemungkinan-kemungkinan yang ada adalah 3 putra dan 1 putri, 2 putra dan 2 putri, 1 putra dan 3 putri, atau keempatnya putri, di mana masing-masing kita hitung dengan menggunakan kombinasi dan aturan perkalian.

a. Banyaknya kemungkinan pemilihan 3 putra dan 1 putri adalah
$$C(6,3) \times C(6,1) = 20 \times 6 = 120$$
b. Banyaknya kemungkinan pemilihan 2 putra dan 2 putri adalah
$$C(6,2) \times C(6,2) = 15 \times 15 = 225$$
c. Banyaknya kemungkinan pemilihan 1 putra dan 3 putri adalah
$$C(6,1) \times C(6,3) = 20 \times 6 = 120$$
d. Banyaknya kemungkinan pemilihan 4 putri adalah
$$C(6,4) = 15$$

Jadi, menurut aturan penjumlahan, banyaknya cara melakukan pemilihan tersebut adalah $120 + 225 + 120 + 15 = 480$ cara.

Soal

2.52 Anggota paduan suara suatu sekolah yang terbagi menurut jenis suaranya terdiri dari 5 tenor, 6 bass, 9 sopran, dan 4 alto. Akan dibuat sebuah kelompok yang terdiri dari 4 orang. Berapa banyak susunan

kelompok yang bisa dibuat, jika harus dipilih tepat 1 orang bersuara tenor dan sisanya harus ada yang sopran?

2.53 Anton akan mengundang 4 orang dari 9 orang teman laki-laki di kelasnya, tetapi 2 orang di antaranya kembar. Jika si kembar diundang, maka keduanya harus diundang. Jika si kembar tidak diundang, maka keduanya harus tidak diundang. Tentukan banyaknya cara Anton mengundang temannya.

2.54 Dalam sebuah layar yang menampilkan teks terdapat 16 macam warna yang diberi nomor 1 hingga 16. Warna bernomor 1 hingga 8 dapat digunakan sebagai warna layar (*background*), dan warna bernomor 1 hingga 16 dapat digunakan sebagai warna tulisan. Jika teks yang berwarna sama dengan layar tidak dapat terbaca, maka tentukan banyaknya kombinasi warna teks dan layar yang dapat terbaca.

2.55 Terdapat 11 kartu yang diberi nomor 1 sampai 11, akan diambil 3 kartu darinya. Ada berapa cara pengambilan, jika jumlah ketiga nomor tersebut berupa bilangan genap?

2.56 Ada berapa macam susunan pengurus yang dapat dipilih dari 4 pasang siswa-siswi dari 4 sekolah, jika pengurus ini terdiri dari 3 orang, tidak boleh ada pasangan siswa-siswi dari 1 sekolah yang sama-sama terpilih dan ada 1 siswi tertentu mengundurkan diri?

2.57 Delapan orang berencana mengantarkan sepasang pengantin dengan mengendarai dua mobil, masing-masing mobil berkapasitas enam orang. Jika sepasang pengantin tersebut harus berada dalam satu mobil, tentukan banyaknya cara yang dapat dilakukan oleh rombongan tersebut untuk mengendarai mobil.

2.58 Sebuah *rollercoaster* memiliki 5 gerbong kereta yang masing-masing memuat 4 tempat duduk, dua di depan dan dua di belakang. Terdapat 20 orang pengunjung. Dalam berapa cara pengunjung-pengunjung tersebut dapat ditempatkan, jika:

a. Tidak ada batasan.

b. Ada satu orang tertentu yang tidak ingin ikut.
c. Ada dua orang tertentu yang ingin duduk di gerbong yang berbeda.
d. Ada enam orang tertentu yang tidak ingin ikut tetapi tidak boleh ada gerbong yang kosong.

Contoh 2.4.5

Dalam sebuah kompleks perumahan terdapat 15 rumah berjajar dengan nomor berurutan dari 1 sampai 15. Ada 5 orang bersaudara yang ingin membeli rumah tersebut, masing-masing 1 rumah. Mereka ingin nomor rumah mereka memenuhi sebuah syarat, yaitu orang yang lebih muda harus memiliki nomor rumah lebih kecil daripada orang yang lebih tua. Ada berapa cara mereka membeli rumah?

Jawab

Masalah ini sepintas kelihatan rumit tetapi sebenarnya mudah. Pertama, mereka harus memilih 5 rumah dari 15 rumah yang ada. Kemudian setelah kelima rumah itu dipilih, maka secara otomatis rumah bernomor terkecil pasti ditempati oleh orang termuda, rumah bernomor terkecil kedua pasti ditempati oleh orang termuda kedua, dan seterusnya. Jadi, hanya ada satu cara pengurutan setelah kelima rumah itu dipilih. Dengan demikian, masalah di atas hanya masalah memilih saja, tanpa menghitung banyaknya pengurutan, yaitu masalah kombinasi biasa. Jadi, banyaknya cara mereka membeli rumah adalah $C(15,5) = 3003$.

Soal

2.59 Tujuh digit kode sandi dibuat dari digit-digit 0, 1, 2, 3, sampai dengan 9. Berapa banyak kode yang:

a. Semua digitnya berbeda.
b. Memuat tepat tiga angka nol dan semua digit lain yang bukan nol berbeda.
c. Semua digitnya berbeda dan nilainya meningkat dari kiri ke kanan, contohnya 1234567, 0124679.

Salah satu penggunaan kombinasi yang sering muncul adalah menghitung banyaknya himpunan bagian (subhimpunan) yang dapat dibuat dari suatu himpunan. Misalkan terdapat suatu himpunan yang terdiri atas n anggota. Banyaknya subhimpunan yang terdiri atas r anggota dapat dihitung dengan kombinasi, yaitu

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Sebagai contoh, misalkan terdapat sebuah himpunan yang memiliki 5 anggota, maka:

a. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 5 anggota adalah

$$C(5,5) = \frac{5!}{0!5!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

b. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 4 anggota adalah

$$C(5,4) = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

c. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 3 anggota adalah

$$C(5,3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$$

d. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 2 anggota adalah

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

e. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 1 anggota adalah

$$C(5,1) = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

f. Banyaknya subhimpunan yang memiliki 0 anggota (himpunan kosong) adalah

$$C(5,0) = \frac{5!}{5!0!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

Jika kita menjumlahkan semua banyaknya subhimpunan tersebut, maka kita akan memperoleh

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

Hasil penjumlahan ini menyatakan banyaknya subhimpunan keseluruhan yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang terdiri atas 5 anggota, termasuk himpunan kosong dan himpunan itu sendiri. Hal ini dapat dipan-

dang dengan cara lain, yaitu dengan memerhatikan bahwa setiap anggota himpunan tersebut memiliki 2 kemungkinan, yaitu muncul atau tidak muncul dalam subhimpunan yang dibentuk. Karena terdapat 5 anggota, maka terdapat sebanyak $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ kemungkinan subhimpunan.

Gagasan ini memberikan suatu identitas yang sangat bagus, yaitu

$$C(5,0) + C(5,1) + C(5,2) + C(5,3) + C(5,4) + C(5,5) = 2^5$$

dan dengan cara serupa dapat dibuktikan bahwa identitas ini berlaku untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n, yaitu

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \dots + C(n,n) = 2^n$$

Identitas ini juga akan dibahas kembali dalam bagian 2.8 yaitu koefisien binomial dengan cara pandang yang berbeda.

Soal

2.60 Dimiliki himpunan $A = \{x \mid -1 \le x \le 5, x \in \text{bilangan bulat}\}$.

a. Berapa banyak himpunan bagian dari A?

b. Berapa banyak himpunan bagian dari A yang memiliki tepat dua anggota?

c. Berapa banyak himpunan bagian dari A yang memiliki paling sedikit empat anggota?

d. Berapa banyak himpunan bagian dari A yang memiliki paling banyak enam anggota?

e. Berapa banyak himpunan bagian dari A yang bukan merupakan himpunan kosong dan memiliki paling banyak tiga anggota?

2.5 Permutasi dan Kombinasi dengan Pengulangan

2.5.1 Permutasi dengan Pengulangan

Pada bagian ini akan dibahas dua jenis permutasi dengan pengulangan, yakni permutasi dengan pengulangan yang tak terbatas dan permutasi dengan pengulangan yang terbatas.

Masalah permutasi dengan pengulangan yang tak terbatas muncul misalnya ketika kita akan menghitung banyaknya cara memberikan tiga pekerjaan kepada lima orang jika masing-masing pekerja dapat menerima lebih dari satu pekerjaan. Dalam hal ini, kita melihat

bahwa setiap pekerjaan memiliki lima kemungkinan kepada siapa akan diberikan, maka menurut aturan perkalian, banyaknya cara memberikan pekerjaan tersebut adalah

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

cara.

Kita mencoba melihat perbedaan permutasi ini dengan permutasi yang telah dibahas sebelumnya. Jika kita menghitung ini dengan permutasi yang telah dibahas sebelumnya, maka kita akan mendapatkan

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3$$

Dengan penghitungan seperti ini, jika seorang pekerja telah menerima sebuah pekerjaan, pekerja tersebut tidak boleh menerima pekerjaan yang lain. Dengan kata lain, dalam menghitung banyaknya pekerja tidak diperbolehkan adanya pengulangan. Namun masalah di atas tidaklah demikian. Di sini, seorang pekerja yang telah menerima sebuah pekerjaan dapat menerima pekerjaan yang lain.

Secara umum, banyaknya cara memberikan sebanyak r pekerjaan kepada n orang pekerja adalah

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{r} = n^r$$

Permutasi dengan Pengulangan Tak Terbatas
Banyaknya permutasi r objek dari n objek jika setiap objek boleh diulang sebanyak tak terbatas adalah n^r.

Contoh 2.5.1.1

Berapa banyak kata dengan panjang empat huruf (tidak harus memiliki arti) yang dapat dirangkai dari abjad bahasa Indonesia?

Jawab

Karena terdapat 26 abjad dalam bahasa Indonesia dan masing-masing dalam kata yang terangkai dapat dipakai sebanyak tak terbatas, maka banyaknya cara merangkai kata ini adalah

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456976$$

cara.

Soal

2.61 Sebuah minibus yang memiliki dua pintu penumpang sedang memuat 16 orang penumpang. Berapa banyak cara penumpang-penumpang tersebut keluar dari minibus?

2.62 Delapan buah mobil berbeda akan dibawa ke bengkel untuk diperbaiki. Jika di kota itu terdapat tiga bengkel yang berbeda, berapa banyak cara membagikan mobil-mobil itu ke bengkel-bengkel tersebut?

Masalah berikutnya adalah menghitung banyaknya permutasi objek-objek jika masing-masing objek memiliki banyak pengulangan yang terbatas. Masalah ini muncul misalnya ketika kita akan menghitung banyaknya susunan huruf-huruf yang dapat dibentuk dari kata *MAMALIA*. Untuk melakukan hal ini, kita dapat memandang dengan cara sebagai berikut.

Dalam kata *MAMALIA* terdapat 2 huruf M, 3 huruf A, 1 huruf L, dan 1 huruf I. Ketujuh huruf yang tersedia ini akan kita susun ke dalam 7 kotak sehingga membentuk susunan huruf-huruf. Pertama-tama, kita memilih 2 kotak dari 7 kotak yang tersedia untuk ditempati huruf M. Selanjutnya, kita memilih 3 kotak dari 5 kotak yang tersisa untuk ditempati huruf A. Selanjutnya, kita memilih 1 kotak dari 2 kotak yang tersisa untuk ditempati huruf L. Terakhir, kita memilih 1 kotak dari 1 kotak yang tersisa untuk ditempati huruf I. Jadi, berdasarkan aturan perkalian diperoleh

$$\begin{aligned} C(7,2) \times C(5,3) \times C(2,1) \times C(1,1) &= \frac{7!}{2!5!} \times \frac{5!}{3!2!} \times \frac{2!}{1!1!} \times \frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{7!}{2!3!1!1!} \end{aligned}$$

yang jika kita hitung menghasilkan 420.

Selanjutnya marilah kita memperumum gagasan ini. Misalkan kita akan menyusun n objek yang terdiri atas n_1 objek jenis pertama, n_2 objek jenis kedua, n_3 objek jenis ketiga, dan seterusnya sampai dengan

n_k objek jenis ke-k, sehingga $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$. Langkah pertama adalah kita memilih sebanyak n_1 kotak dari n kotak yang tersedia untuk ditempati objek-objek jenis pertama, sehingga tersisa sebanyak $n - n_1$ kotak yang belum tertempati. Selanjutnya kita memilih sebanyak n_2 kotak dari $n - n_1$ kotak yang tersisa untuk ditempati objek-objek jenis kedua, sehingga tersisa sebanyak $n - n_1 - n_2$ kotak yang belum tertempati. Proses ini kita lanjutkan sampai dengan memilih sebanyak n_k kotak dari $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}$ kotak yang tersisa untuk ditempati objek-objek jenis ke-k. Jadi, berdasarkan aturan perkalian diperoleh

$$C(n,n_1) \times C(n-n_1,n_2) \times \ldots \times C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \ldots \times \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!0!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Permutasi dengan Pengulangan Terbatas

Banyaknya permutasi dari n objek jika masing-masing objek berulang sebanyak n_1, n_2, ..., n_k sehingga $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 2.5.1.2

Tentukan banyaknya susunan huruf dari huruf-huruf pembentuk kata *MATEMATIKA*, jika:

a. Tidak ada batasan.

b. Vokal dan konsonan bergantian.

c. Diawali dengan konsonan.

Jawab

a. Dalam kata *MATEMATIKA* terdapat 2 huruf *M*, 3 huruf *A*, 2 huruf *T*, 1 huruf *E*, 1 huruf *I*, dan 1 huruf *K*, maka diperoleh

$$\frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!3!2!1!1!1!} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3! \times 2 \times 1}$$
$$= 151200$$

Jadi, ada 151200 susunan huruf.

b. Karena diminta susunan huruf vokal dan konsonan bergantian sedangkan kata *MATEMATIKA* memiliki 5 huruf vokal dan 5 huruf konsonan, maka terdapat dua kemungkinan jenis susunan, yaitu susunan yang diawali dengan huruf vokal dan susunan yang diawali dengan huruf konsonan. Kedua jenis susunan ini dapat dihitung dengan cara yang sama, yaitu dengan menghitung banyaknya permutasi setiap vokal dan setiap konsonan sendiri-sendiri. Hasil penghitungan ini kemudian kita kalikan dua. Maka diperoleh

$$2 \times \frac{(3+1+1)!}{3!1!1!} \times \frac{(2+2+1)!}{2!2!1!} = 2 \times \frac{5!}{3!} \times \frac{5!}{2!2!}$$
$$= 2 \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1}$$
$$= 1200$$

Jadi, ada 1200 susunan huruf.

c. Mula-mula kita isi terlebih dahulu huruf awalnya, yaitu konsonan. Terdapat tiga kemungkinan konsonan sebagai huruf awalnya, yaitu:

1) Jika susunan diawali dengan huruf *M*, maka kita cukup menghitung susunan dari 9 huruf terakhir yang dipilih dari 1 huruf *M*, 3 huruf *A*, 2 huruf *T*, 1 huruf *E*, 1 huruf *I*, dan 1 huruf *K* yang tersisa.

$$\frac{9!}{1!3!2!1!1!1!} = 30240$$

2) Jika susunan diawali dengan huruf *T*, maka kita cukup menghitung susunan dari 9 huruf terakhir yang dipilih dari 2 huruf *M*, 3 huruf *A*, 1 huruf *T*, 1 huruf *E*, 1 huruf *I*, dan 1 huruf *K* yang tersisa.

$$\frac{9!}{2!3!1!1!1!1!} = 30240$$

3) Jika susunan diawali dengan huruf K, maka kita cukup menghitung susunan dari 9 huruf terakhir yang dipilih dari 2 huruf M, 3 huruf A, 2 huruf T, 1 huruf E, dan 1 huruf I yang tersisa.

$$\frac{9!}{2!3!2!1!1!} = 15120$$

Jadi, ada 30240 + 30240 + 15120 = 75600 susunan huruf.

Soal

2.63 Hitunglah banyaknya susunan huruf pembentuk kata *BEBERAPA*, jika:

a. Tidak ada batasan.

b. Vokal dan konsonan bergantian.

c. Kedua huruf *B* selalu berdekatan.

d. Tidak boleh diakhiri dengan "*EE*".

e. Diawali dengan vokal dan diakhiri dengan konsonan.

2.64 Berapa banyaknya susunan berbeda yang mungkin dari perkalian $x^2y^4z^3$ jika ditulis secara memanjang?

2.65 Digit-digit dari bilangan 314152 disusun kembali sehingga bilangan yang dihasilkan merupakan bilangan ganjil. Tentukan banyaknya cara melakukan hal ini.

2.66 Perhatikan sekumpulan bilangan-bilangan asli 6 digit yang digit-digitnya terdiri dari angka 5, 6, 7, dan tiga angka 8.

a. Berapa banyak bilangan-bilangan tersebut?

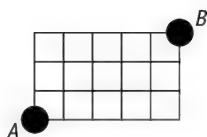
b. Berapa banyak di antaranya yang merupakan bilangan ganjil?

c. Berapa banyak di antaranya yang merupakan bilangan ganjil dan memiliki tiga angka 8 yang berdekatan?

2.67 Hitunglah banyaknya bilangan bulat positif yang lebih dari 5.000.000 yang dapat dibentuk menggunakan angka-angka 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7.

2.68 Tersedia empat huruf *A*, dua huruf *B*, dan tiga huruf *C* untuk disusun secara acak. Hitunglah banyaknya susunan yang simetris (misalnya *AABCCCBAA*).

Contoh 2.5.1.3

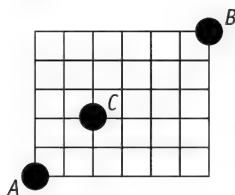
Pada gambar di bawah ini, berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B?

Jawab

Kita perhatikan bahwa jalan terpendek dari A menuju B adalah jalan ke kanan dan ke atas sebanyak 8 langkah, yaitu 5 langkah ke kanan dan 3 langkah ke atas. Jika kita merepresentasikan langkah ke kanan sebagai huruf "*K*", sedangkan langkah ke atas sebagai huruf "*A*", maka tugas kita sekarang adalah menyusun 5 huruf "*K*" dan 3 huruf "*A*" tersebut membentuk sebuah susunan 8 huruf. Sebagai contoh, susunan *KAKKKAAK* mewakili satu langkah ke kanan, satu langkah ke atas, tiga langkah ke kanan, dua langkah ke atas, dan satu langkah ke kanan. Banyaknya cara penyusunan ini adalah

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

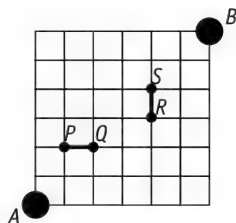
Jadi, ada sebanyak 56 jalan terpendek dari A menuju B.

Soal

2.69 Perhatikan gambar di bawah ini.

a. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B?

b. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika harus melewati C?

c. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika tidak boleh melewati C?

2.70 Perhatikan gambar di bawah ini.

a. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B?

b. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika harus melewati segmen PQ?

c. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika harus melewati segmen RS?

d. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika harus melewati segmen PQ dan RS?

e. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika harus melewati segmen PQ atau RS?

f. Berapa banyak jalan terpendek dari A menuju B jika tidak boleh melewati segmen PQ maupun RS?

2.5.2 Kombinasi dengan Pengulangan

Dengan kombinasi tanpa pengulangan yang telah dibahas sebelumnya, kita dapat menyelesaikan masalah berikut. Misalkan di sebuah toko terdapat 3 jenis permen, yaitu permen rasa coklat, stroberi, dan jeruk. Kita ingin menghitung banyaknya cara memilih 2 permen berbeda dari 3 permen tersebut. Banyaknya cara melakukan hal ini adalah

$$C(3,\ 2) = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1} = 3$$

cara.

Dalam penghitungan tersebut, kita hanya diperbolehkan memilih sebuah permen untuk setiap jenisnya. Masalah berikutnya yang muncul adalah bagaimana jika kita dapat memilih lebih dari satu permen untuk setiap jenisnya tetapi tidak semua jenis permen harus kita ambil? Kini misalkan kita akan mengambil 4 permen. Dalam kasus

ini, kemungkinan pengambilan yang memuat beberapa jenis permen yang sama diperhitungkan. Kasus semacam ini adalah kasus kombinasi dengan pengulangan.

Beberapa kemungkinan pengambilan di antaranya adalah 1 permen coklat, 2 permen stroberi, 1 dan permen jeruk; 2 permen coklat dan 1 permen jeruk tanpa mengambil permen stroberi; dan sebagainya. Kita dapat membuat daftar yang teratur untuk menuliskan semua kemungkinan yang ada.

No.	Coklat	Stroberi	Jeruk	Keterangan
1	1111			4 coklat
2		1111		4 stroberi
3			1111	4 jeruk
4	111	1		3 coklat, 1 stroberi
5	111		1	3 coklat, 1 jeruk
6	1	111		3 stroberi, 1 coklat
7		111	1	3 stroberi, 1 jeruk
8	1		111	3 jeruk, 1 coklat
9		1	111	3 jeruk, 1 stroberi
10	11	11		2 coklat, 2 stroberi
11	11		11	2 coklat, 2 jeruk
12		11	11	2 stroberi, 2 jeruk
13	11	1	1	2 coklat, 1 stroberi, 1 jeruk
14	1	11	1	1 coklat, 2 stroberi, 1 jeruk
15	1	1	11	1 coklat, 1 stroberi, 2 jeruk

Perhatikan bahwa dalam setiap baris di atas pasti termuat sebanyak 4 angka 1, sebab kita diminta mengambil sebanyak 4 permen. Hal yang membedakan suatu baris dengan baris lainnya adalah letak angka-angka 1 tersebut. Untuk menunjukkan hal ini, di antara setiap kolom yang menunjukkan jenis permen tersebut kita sisipi angka nol sebagai "pembatas". Akibatnya, kita akan melihat bahwa setiap baris tersebut terwakili oleh suatu susunan angka-angka 1 dan 0 yang unik.

No.	Coklat		Stroberi		Jeruk	Susunan angka 1 dan 0 yang terlihat
1	1111	0		0		111100
2		0	1111	0		011110
3		0		0	1111	001111
4	111	0	1	0		111010
5	111	0		0	1	111001
6	1	0	111	0		101110
7		0	111	0	1	011101
8	1	0		0	111	100111
9		0	1	0	111	010111
10	11	0	11	0		110110
11	11	0		0	11	110011
12		0	11	0	11	011011
13	11	0	1	0	1	110101
14	1	0	11	0	1	101101
15	1	0	1	0	11	101011

Dengan cara pandang seperti ini, kita dapat memerhatikan bahwa banyaknya cara memilih 4 permen dari 3 jenis permen yang tersedia jika diperbolehkan adanya pengulangan adalah sama dengan banyaknya permutasi angka 1 dan 0 tersebut. Di sini terdapat 4 angka 1 yang menunjukkan banyaknya kue yang akan dipilih serta 2 angka nol yang menunjukkan banyaknya pembatas yang dibuat. Banyaknya pembatas yang dibuat ini tentu adalah satu kurangnya dari banyaknya jenis permen. Jadi, kasus ini berubah menjadi permutasi dengan pengulangan terbatas. Cara menghitungnya adalah

$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$$

Secara umum, jika terdapat n jenis permen yang tersedia dan kita diminta menghitung banyaknya cara memilih r permen dan diperbo-

lehkan adanya pengulangan, maka kita akan membuat sebanyak $n - 1$ angka nol sebagai pembatas. Akibatnya kita menghitung banyaknya permutasi $r + (n - 1)$ angka yang terdiri dari r angka 1 dan $n - 1$ angka 0, yaitu

$$\frac{[r+(n-1)]!}{r!(n-1)!} = C(r+(n-1),r) = C(n+r-1,r)$$

Kombinasi dengan Pengulangan

Banyaknya kombinasi r objek dari n objek jika setiap objek memiliki banyak pengulangan yang tak terbatas adalah

$$C(n + r - 1, r)$$

Perhatikan kembali masalah memilih permen di atas. Dalam cara pandang yang lain, kita dapat memisalkan x_1 adalah banyaknya permen coklat yang dipilih, x_2 adalah banyaknya permen stroberi yang dipilih, dan x_3 adalah banyaknya permen jeruk yang dipilih. Di sini tentu x_1, x_2, dan x_3 memenuhi kondisi $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$, dan ketiga variabel ini memenuhi persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Gagasan ini dapat kita gunakan untuk menghitung banyaknya solusi persamaan linear di atas.

Menghitung Banyaknya Solusi Persamaan Linear

Banyaknya solusi persamaan linear

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r$$

dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah bilangan-bilangan bulat nonnegatif adalah

$$C(n + r - 1, r)$$

Hal ini memperlihatkan bahwa masalah menentukan banyaknya solusi persamaan tersebut dapat kita analogikan sebagai masalah memilih r objek dari sekumpulan objek yang memuat n jenis objek. Variasi masalah ini nantinya bisa bermacam-macam. Perhatikan kedua contoh berikut.

Contoh 2.5.2.1

Sebuah toko roti menyediakan 4 jenis donat. Jika sekotak donat memuat selusin donat, berapa banyak pilihan yang ada untuk sekotak donat tersebut, jika:

a. Tidak ada batasan.
b. Paling sedikit dua donat jenis tertentu harus dipilih.
c. Tepat tiga donat jenis tertentu harus dipilih.
d. Paling sedikit satu donat untuk setiap jenisnya harus dipilih.

Jawab

a. Masalah ini serupa dengan pemilihan permen di atas. Maka diperoleh

$$C(4+12-1,12)=\frac{15!}{3!12!}=\frac{15\times 14\times 13\times 12!}{3\times 2\times 1\times 12!}=455$$

Jadi, ada 455 pilihan.

b. Jika ditentukan bahwa paling sedikit dua donat jenis tertentu harus dipilih, maka mula-mula kita pilih kedua donat jenis tertentu tersebut, kemudian kita tinggal memilih 10 donat yang lain dari 4 jenis donat yang tersedia. Maka diperoleh

$$C(4+10-1,10)=\frac{13!}{3!10!}=\frac{13\times 12\times 11\times 10!}{3\times 2\times 1\times 10!}=286$$

Jadi, ada 286 pilihan.

c. Jika ditentukan bahwa tepat tiga donat jenis tertentu harus dipilih, maka mula-mula kita pilih ketiga donat jenis tertentu tersebut, kemudian kita tinggal memilih 9 donat yang lain dari 3 jenis donat yang tersedia, karena kita tidak boleh lagi memilih donat dengan jenis yang telah kita pilih. Maka diperoleh

$$C(3+9-1,9)=\frac{11!}{2!9!}=\frac{11\times 10\times 9!}{2\times 1\times 9!}=55$$

Jadi, ada 55 pilihan.

d. Jika ditentukan bahwa paling sedikit satu donat untuk setiap jenisnya harus dipilih, maka mula-mula kita pilih satu donat untuk setiap jenisnya, kemudian kita tinggal memilih 8 donat yang lain dari 4 jenis donat yang tersedia. Maka diperoleh

$$C(4+8-1,8)=\frac{11!}{3!8!}=\frac{11\times 10\times 9\times 8!}{3\times 2\times 1\times 8!}=45$$

Jadi, ada 45 pilihan.

Contoh 2.5.2.2

Berapa banyak solusi bilangan bulat nonnegatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

a. Jika tidak ada batasan.

b. Jika $x_1 \geq 2$.

c. Jika $x_1 = 3$.

d. Jika x_1, x_2, x_3, x_4 bilangan-bilangan asli.

Jawab

a. Jika tidak ada batasan maka diperoleh

$$C(4+12-1,12)=\frac{15!}{3!12!}=\frac{15\times 14\times 13\times 12!}{3\times 2\times 1\times 12!}=455$$

Jadi, ada 455 solusi persamaan ini.

b. Jika disyaratkan $x_1 \geq 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 \geq 0$, maka kita dapat memisalkan $x_1 - 2 = y \Leftrightarrow x_1 = y + 2$, sehingga $y \geq 0$. Akibatnya kita memperoleh persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad (y + 2) + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad y + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Sehingga banyaknya solusi persamaan ini adalah

$$C(4+10-1,10)=\frac{13!}{3!10!}=\frac{13\times 12\times 11\times 10!}{3\times 2\times 1\times 10!}=286$$

di mana setiap nilai y akan memberikan satu nilai x_1 menurut pemisalan di atas.

Jadi, ada 286 solusi persamaan ini.

c. Jika $x_1 = 3$, maka kita memperoleh persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad 3 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

Sehingga banyaknya solusi persamaan ini adalah

$$C(3+9-1,9)=\frac{11!}{2!9!}=\frac{11\times 10\times 9!}{2\times 1\times 9!}=55$$

Jadi, ada 55 solusi persamaan ini.

d. Jika x_1, x_2, x_3, x_4 bilangan-bilangan asli, dengan kata lain

$$x_1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 1 \Leftrightarrow x_2 - 1 \geq 0$$
$$x_3 \geq 1 \Leftrightarrow x_3 - 1 \geq 0$$
$$x_4 \geq 1 \Leftrightarrow x_4 - 1 \geq 0$$

maka kita misalkan

$$x_1 - 1 = y_1 \Leftrightarrow x_1 = y_1 + 1$$
$$x_2 - 1 = y_2 \Leftrightarrow x_2 = y_2 + 1$$
$$x_3 - 1 = y_3 \Leftrightarrow x_3 = y_3 + 1$$
$$x_4 - 1 = y_4 \Leftrightarrow x_4 = y_4 + 1$$

Akibatnya kita memperoleh persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$$

Sehingga banyaknya solusi persamaan ini adalah

$$C(4+8-1,8)=\frac{11!}{3!8!}=\frac{11\times 10\times 9\times 8!}{3\times 2\times 1\times 8!}=45$$

di mana setiap nilai y_1 akan memberikan satu nilai x_1, setiap nilai y_2 akan memberikan satu nilai x_2, setiap nilai y_3 akan memberikan satu nilai x_3, dan setiap nilai y_4 akan memberikan satu nilai x_4 menurut pemisalan di atas.

Jadi, ada 45 solusi persamaan ini.

Perhatikan kembali kedua contoh di atas. Jika kita perhatikan dengan cermat, sebenarnya kedua contoh di atas merupakan masalah yang sama, namun dipandang dalam dua cara yang berbeda. Pada contoh 2.5.2.1 kita memandang permasalahan tersebut dengan menggunakan logika biasa, sedangkan pada contoh 2.5.2.2 kita memandang permasalahan tersebut secara aljabar.

Dengan melihat kembali gagasan pada contoh 2.5.2.2, kita dapat menentukan solusi bilangan bulat nonnegatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

jika $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 3$, dan $x_3 \geq 4$, yaitu dengan memisalkan

$$x_1 - 1 = y_1 \Leftrightarrow x_1 = y_1 + 1$$
$$x_2 - 3 = y_2 \Leftrightarrow x_2 = y_2 + 3$$
$$x_3 - 4 = y_3 \Leftrightarrow x_3 = y_3 + 4$$

sehingga diperoleh y_1, y_2, y_3 yang merupakan bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi persamaan

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\
\Leftrightarrow \quad & (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 4) = 10 \\
\Leftrightarrow \quad & y_1 + y_2 + y_3 = 2
\end{aligned}
$$

Sehingga banyaknya solusi adalah

$$C(3+2-1,2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = 6$$

Pada permasalahan ini, kendala-kendala untuk x_1, x_2, x_3 berupa batas bawah, yaitu $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 3$, dan $x_3 \geq 4$. Permasalahan berikutnya yang timbul adalah bagaimana jika kendala-kendala tersebut berupa batas atas, misalnya $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 5$, dan $x_3 \leq 6$. Jika kendala-kendala tersebut berupa batas atas, kita tidak selalu dapat mengerjakan dengan cara sama seperti dalam contoh tersebut.

Kita misalkan A_1 adalah himpunan semua solusi persamaan tersebut dengan $x_1 \geq 5$, A_2 adalah himpunan semua solusi persamaan tersebut dengan $x_2 \geq 6$, dan A_3 adalah himpunan semua solusi persamaan tersebut dengan $x_3 \geq 7$, sedangkan S adalah himpunan semua solusi persamaan tersebut tanpa kendala. Kendala dari A_1, A_2, A_3 diperoleh dari komplemen dari kendala-kendala batas atas yang diberikan.

Di sini kita harus menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, dalam hal ini untuk tiga himpunan, yaitu

$$
\begin{aligned}
n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) \\
& - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

dan kita mengetahui menurut aljabar himpunan bahwa

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(S) - n(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

Nilai $n(S)$, $n(A_1)$, $n(A_2)$, $n(A_3)$, $n(A_1 \cap A_2)$, $n(A_1 \cap A_3)$, $n(A_2 \cap A_3)$, dan $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ dapat kita hitung satu demi satu, sehingga kita dapat memperoleh yang kita inginkan, yaitu $n(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$.

Masalah lainnya adalah menentukan solusi dari ketaksamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

dengan x_1, x_2, x_3 bilangan-bilangan bulat nonnegatif. Untuk menyelesaikan masalah ini kita dapat menggunakan sebuah variabel baru yang juga berupa bilangan bulat nonnegatif yaitu x_4 sehingga

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

dan kita cukup menghitung banyaknya solusi persamaan ini.

Soal

2.71 Di dalam toko boneka dijual tiga jenis boneka hewan, yaitu boneka kelinci, landak, dan beruang. Dalam berapa cara dapat dipilih sepuluh boneka di antaranya, jika:

a. Tidak ada batasan.

b. Paling sedikit satu boneka kelinci harus terpilih.

c. Paling sedikit satu boneka kelinci, dua boneka landak, dan tiga boneka beruang harus terpilih.

d. Tepat satu boneka landak harus terpilih.

e. Tepat satu boneka landak dan paling sedikit satu boneka kelinci harus terpilih.

f. Paling banyak satu boneka beruang harus terpilih.

g. Paling banyak tiga boneka kelinci, lima boneka landak, dan tiga boneka beruang harus terpilih.

h. Paling sedikit satu boneka kelinci dan paling banyak dua boneka beruang harus terpilih.

i. Banyaknya boneka kelinci adalah dua kali banyaknya boneka beruang yang terpilih.

2.72 Misalkan di sebuah toko terdapat n jenis permen dan akan dipilih sebanyak r permen dengan syarat paling sedikit satu permen untuk setiap jenisnya harus terpilih. Tunjukkan bahwa banyaknya cara pemilihan ini adalah $C(r - 1, r - n)$.

2.73 Berapa banyak solusi bilangan bulat dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

jika:

a. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nonnegatif.

b. $x_i \geq 2$ untuk $i = 1,2,3,4,5$.

c. x_1, x_3, x_4 nonnegatif serta $x_2 \geq 2$ dan $x_5 \geq 7$.

d. $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq -1$, $x_3 \geq 8$, $x_4 \geq -2$, dan $x_5 \geq -4$.

e. x_1, x_2, x_3, x_5 nonnegatif serta $x_4 \leq 10$.

f. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 semuanya adalah bilangan bulat ganjil nonnegatif.

2.74 Berapa banyak solusi bilangan bulat nonnegatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

jika $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$, dan $x_3 \leq 7$.

2.75 Jika tiga buah dadu dilempar, berapa banyak cara munculnya mata-mata dadu berjumlah 10?

2.76 Berapa banyak bilangan-bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang jumlah digit-digitnya adalah 21?

2.77 Berapa banyak solusi $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dengan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bilangan-bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21 \end{cases}$$

2.78 Berapa banyak solusi bilangan bulat nonnegatif dari

a. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$

b. $x_1 + x_2 + x_3 < 20$

c. $\begin{cases} x_1 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 9 \end{cases}$

2.79 Berapa banyak solusi bilangan bulat nonnegatif dari

$$18 < x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

2.6 Membagikan Objek ke dalam Kotak

Beberapa masalah berhitung dapat dipandang sebagai masalah memasukkan objek ke dalam kotak. Marilah kita perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan di tangan kita terdapat sebuah kantong yang berisi 10 bola berwarna-warni. Kita akan memasukkan bola-bola tersebut ke dalam 3 kotak yang bernomor 1, 2, 3 sehingga setiap kotak berisi 2 bola.

Mula-mula yang kita lakukan adalah kita berjalan menghampiri kotak pertama, kemudian memilih 2 bola dari 10 bola di kantong kita dan memasukkannya ke kotak pertama tersebut. Kemudian kita berjalan ke kotak kedua, kemudian memilih 2 bola dari 8 bola yang tersisa di kantong kita dan memasukkannya ke kotak kedua tersebut. Terakhir, kita berjalan ke kotak ketiga, kemudian memilih 2 bola dari 6 bola yang tersisa di kantong kita dan memasukkannya ke kotak ketiga tersebut. Sekarang tersisa 4 bola di kantong kita.

Dari sini dapat kita hitung banyaknya cara kita melakukan hal ini, yaitu

$$C(10,2) \times C(8,2) \times C(6,2) = \frac{10!}{2!8!} \times \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!}$$

Serupa dengan permutasi dengan pengulangan terbatas, kita perhatikan bahwa beberapa bilangan dalam bentuk tersebut saling menghapuskan, dan menyisakan

$$C(10,2) \times C(8,2) \times C(6,2) = \frac{10!}{2!2!2!4!}$$

yang jika kita hitung menghasilkan 18900.

Dalam proses ini, sebenarnya dapat kita pandang bahwa kotak yang ada bukanlah sebanyak 3 kotak, melainkan 4 kotak. Kotak yang terakhir adalah kotak yang terisi 4 bola yang tersisa. Sehingga, masalah ini merupakan masalah membagikan 10 objek berbeda ke dalam 4 kotak berbeda dengan masing-masing kotak berturut-turut memuat 2, 2, 2, dan 4 objek.

Secara umum kita dapat memperlihatkan hal yang serupa jika n objek berbeda dibagikan ke dalam k kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang spesifik.

Pembagian n Objek Berbeda ke dalam k Kotak Berbeda dengan Masing-masing Kotak Memuat Objek dengan Jumlah yang Spesifik

Banyaknya cara membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang spesifik, yaitu n_1 objek pada kotak ke-1, n_2 objek pada kotak ke-2, dan seterusnya sampai dengan n_k objek pada kotak ke-k, sehingga $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 2.6.1

Dalam permainan kartu remi yang terdiri atas 4 peserta, kepada setiap peserta dibagikan 5 kartu. Berapa banyak cara membagikan kartu-kartu tersebut?

Jawab

Masalah ini dapat kita pandang sebagai masalah membagikan objek berbeda ke dalam kotak berbeda, di mana objek yang dimaksud adalah kartu, dan kotak yang dimaksud adalah peserta. Terdapat 52 objek, dan terdapat 5 kotak, dan kita harus membagikan 4 objek pada kotak ke-1, 4 objek pada kotak ke-2, 4 objek pada kotak ke-3, 4 objek pada kotak ke-4, dan 32 objek pada kotak ke-5. Jadi, banyaknya cara membagikan kartu-kartu tersebut adalah

$$\frac{52!}{4!4!4!4!36!}$$

cara.

Selanjutnya bagaimana jika masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang bebas? Pada kasus ini, cara pandang kita adalah bahwa setiap objek memiliki k kemungkinan kotak di mana ia akan dimasukkan. Karena terdapat sebanyak n objek, maka banyaknya cara pembagian tersebut adalah

$$\underbrace{k \times k \times k \times \ldots \times k}_{n} = k^n$$

Pembagian n Objek Berbeda ke dalam k Kotak Berbeda dengan Masing-masing Kotak Memuat Objek dengan Jumlah yang Bebas
Banyaknya cara membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas adalah k^n.

Contoh 2.6.2

Sebuah kantor memiliki enam ruangan. Jika terdapat lima orang karyawan, maka berapa banyak cara menempatkan kelima orang karyawan dalam ruangan-ruangan tersebut?

Jawab

Pada masalah ini, setiap karyawan memiliki 6 kemungkinan ruangan di mana ia akan ditempatkan. Karena terdapat sebanyak 5 orang karyawan, maka banyaknya cara penempatan tersebut adalah $6^5 = 7776$ cara.

Kini kita akan mengembangkan hal di atas, yaitu jika kita membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak yang identik. Kita akan terlebih dahulu melihat kasus setiap kotak memuat objek dengan jumlah yang spesifik. Jika kotak-kotak tersebut identik, maka kita dapat memandang dua macam kasus. Kasus pertama adalah setiap kotak berisi objek-objek dengan jumlah yang berbeda, sedangkan kasus kedua adalah setiap kotak berisi objek-objek dengan jumlah yang sama. Untuk membedakan kedua kasus ini, kita perhatikan ilustrasi berikut.

Misalkan kita akan menempatkan 4 objek berbeda, yaitu A, B, C, D ke dalam 2 kotak. Kita akan melihat perbedaan cara penghitungan kita dalam kedua kasus di atas. Kasus pertama, setiap kotak berisi objek-objek dengan jumlah yang berbeda, misalkan 1 objek (pada kotak pertama jika kotak berbeda) dan 3 objek (pada kotak kedua jika kotak berbeda). Kasus kedua, setiap kotak berisi objek-objek dengan jumlah yang sama, misalkan masing-masing 2 objek. Kita mencoba menuliskan semua kemungkinan yang ada dalam tabel berikut.

Kotak berisi 1 objek dan 3 objek			Kotak berisi masing-masing 2 objek		
Kotak berbeda		Kotak identik	Kotak berbeda		Kotak identik
Kotak 1	Kotak 2		Kotak 1	Kotak 2	
A	*B*, *C*, *D*	{{*A*}, {*B*, *C*, *D*}}	*A*, *B*	*C*, *D*	{{*A*, *B*}, {*C*, *D*}}
B	*A*, *C*, *D*	{{*B*}, {*A*, *C*, *D*}}	*A*, *C*	*B*, *D*	{{*A*, *C*}, {*B*, *D*}}
C	*A*, *B*, *D*	{{*C*}, {*A*, *B*, *D*}}	*A*, *D*	*B*, *C*	{{*A*, *D*}, {*B*, *C*}}
D	*A*, *B*, *C*	{{*D*}, {*A*, *B*, *C*}}	*B*, *C*	*A*, *D*	
			B, *D*	*A*, *C*	
			C, *D*	*A*, *B*	

Kini kita perhatikan terlebih dahulu kasus pertama. Terlihat bahwa banyaknya cara membagikan 4 objek berbeda ke dalam 2 kotak berbeda dengan kotak pertama berisi 1 objek dan kotak kedua berisi 3 objek sama dengan banyaknya cara membagikan 4 objek berbeda ke dalam 2 kotak identik dengan masing-masing kotak berisi 1 objek dan 3 objek, yaitu

$$\frac{4!}{1!3!} = 4$$

Secara umum, banyaknya cara membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak identik dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang semuanya berbeda, yaitu n_1, n_2, ..., n_k, dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, tetap sama dengan

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Pada kasus kedua, jika setiap kotak berisi objek-objek dengan jumlah yang sama, maka hasil di atas haruslah kita bagi dengan banyaknya cara menomori kotak-kotak tersebut, yaitu 2!. Jadi, banyaknya cara pembagian ini adalah

$$\frac{\left(\frac{4!}{2!2!}\right)}{2!} = 3$$

Kasus ini selanjutnya dapat kita perluas. Misalkan terdapat kasus sebagai berikut. Kita akan membagikan 7 objek berbeda ke dalam 3 kotak identik, sehingga masing-masing kotak berisi 2 objek, 2 objek, dan 3 objek. Dapat diperlihatkan bahwa banyaknya cara pembagian ini adalah

$$\frac{\left(\frac{7!}{2!2!3!}\right)}{2!} = 105$$

Kasus yang lain misalnya kita akan membagikan 15 objek berbeda ke dalam 6 kotak identik, sehingga masing-masing kotak berisi 2 objek, 2 objek, 2 objek, 4 objek, 4 objek, 1 objek adalah

$$\frac{\left(\frac{15!}{2!2!2!4!4!1!}\right)}{3!2!} = 23648625$$

Secara umum, jika kita akan membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak identik, sehingga masing-masing kotak berisi n_1 objek, n_2 objek, dan seterusnya sampai dengan n_k objek, jika terdapat m_1 jumlah objek yang sama, m_2 jumlah objek yang sama, dan seterusnya sampai dengan m_l jumlah objek yang sama, dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ adalah

$$\frac{\left(\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\right)}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \frac{n!}{(m_1!m_2!\ldots m_l!)(n_1!n_2!\ldots n_k!)}$$

Tentu saja hasil ini juga berlaku jika tidak ada jumlah objek yang sama (setiap kotak memuat objek dengan jumlah yang berbeda), karena jika demikian maka $m_1 = m_2 = \ldots = m_l = 1$ dan $l = k$.

Pembagian n Objek Berbeda ke dalam k Kotak Identik dengan Masing-masing Kotak Memuat Objek dengan Jumlah yang Spesifik

Banyaknya cara membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak identik dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang spesifik, yaitu n_1 objek, n_2 objek, dan seterusnya sampai dengan n_k objek, jika terdapat m_1 jumlah objek yang sama, m_2 jumlah objek yang sama, dan seterusnya sampai dengan m_l jumlah objek yang sama, sehingga $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ adalah

$$\frac{n!}{(m_1!m_2!\ldots m_l!)(n_1!n_2!\ldots n_k!)}$$

Contoh berikut ini menunjukkan perbedaan antara kasus-kasus di atas.

Contoh 2.6.3

Sebuah kelas kursus terdiri atas 15 orang peserta.

a. Berapa banyak cara membagi orang-orang tersebut menjadi 5 kelompok yang masing-masing terdiri dari 1, 2, 3, 4, dan 5 orang?

b. Berapa banyak cara membagi orang-orang tersebut menjadi 5 kelompok yang masing-masing terdiri dari 2, 2, 3, 3, dan 5 orang?

c. Berapa banyak cara membagi orang-orang tersebut menjadi 5 kelompok sehingga kelompok pertama terdiri dari 1 orang, kelompok kedua terdiri dari 2 orang, kelompok ketiga terdiri dari 3 orang, kelompok keempat terdiri dari 4 orang, dan kelompok kelima terdiri dari 5 orang?

d. Berapa banyak cara membagi orang-orang tersebut menjadi 5 kelompok sehingga kelompok pertama terdiri dari 2 orang, kelompok kedua terdiri dari 2 orang, kelompok ketiga terdiri dari 3 orang, kelompok keempat terdiri dari 3 orang, dan kelompok kelima terdiri dari 5 orang?

Jawab

a. Pada masalah pertama ini, setiap kelompok memuat jumlah orang yang berbeda dan tidak ada penomoran kelompok. Oleh karena itu, masalah ini dapat kita pandang sebagai masalah pembagian objek-objek berbeda ke dalam kotak-kotak identik. Jadi, banyaknya cara pembagian kelompok adalah

$$\frac{15!}{1!2!3!4!5!} = 37837800$$

cara.

b. Masalah kedua ini sama dengan masalah pertama tetapi terdapat kelompok yang anggotanya berjumlah sama. Banyaknya cara pembagian kelompok adalah

$$\frac{15!}{(2!2!)(2!2!3!3!5!)} = 18918900$$

cara.

c. Pada masalah ketiga ini, setiap kelompok memuat jumlah orang yang berbeda tetapi ada penomoran kelompok. Oleh karena itu, masalah ini dapat kita pandang sebagai masalah pembagian objek-objek berbeda ke

dalam kotak-kotak berbeda. Jadi, banyaknya cara pembagian kelompok adalah

$$\frac{15!}{1!2!3!4!5!} = 37837800$$

cara.

Perhatikan bahwa penghitungan ini sama dengan penghitungan pada butir a..

d. Masalah keempat ini sama dengan masalah ketiga tetapi terdapat kelompok yang anggotanya berjumlah sama. Pada ilustrasi sebelumnya kita telah mengetahui bahwa adanya jumlah objek yang sama tidak mempengaruhi hasil penghitungan jika kotak-kotaknya berbeda. Jadi, banyaknya cara pembagian kelompok adalah

$$\frac{15!}{2!2!3!3!5!} = 75675600$$

Pada perkembangan selanjutnya, bagaimanakah cara kita menghitung banyaknya cara membagikan n objek berbeda ke dalam k kotak yang identik tetapi masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah yang bebas? Menghitung cara membagikan seperti ini lebih sulit dan tidak ada rumus singkat yang dapat membantu. Jadi, kita hanya dapat menghitungnya dengan menuliskan satu demi satu kemungkinan secara teratur, seperti pada contoh berikut.

Contoh 2.6.4

Pada sebuah permainan di pasar malam terdapat sebuah piringan yang berputar cepat yang memiliki tiga tabung identik. Seorang pemain melemparkan empat bola dengan warna merah, biru, kuning, dan hijau dan berusaha memasukkannya ke tabung-tabung tersebut. Berapa banyak hasil yang dapat diperoleh pemain tersebut jika ia berhasil memasukkan bola pada setiap lemparan?

Jawab

Masalah ini dapat kita pandang sebagai masalah membagikan 4 objek berbeda ke dalam 3 kotak yang identik, di mana masing-masing kotak memuat

objek dengan jumlah yang bebas. Karena tidak ada rumus singkat, maka kita akan menuliskan satu demi satu kemungkinan yang ada.

Misalkan m menyatakan bola merah, b menyatakan bola biru, k menyatakan bola kuning, dan h menyatakan bola hijau. Dilihat dari jumlahnya, cara memasukkan keempat bola tersebut adalah empat bola dimasukkan ke dalam satu tabung, tiga bola dalam satu tabung dan satu bola dalam tabung lain, dua bola dalam satu tabung dan dua bola dalam tabung yang lain, atau dua bola dalam satu tabung dan bola lainnya masing-masing di tabung yang berbeda.

- Cara memasukkan empat bola dalam satu tabung adalah $\{\{m, b, k, h\}\}$, yaitu sebanyak 1 cara.
- Cara memasukkan tiga bola dalam satu tabung dan satu bola dalam tabung yang lain adalah $\{\{m, b, k\}, \{h\}\}$, $\{\{m, b, h\}, \{k\}\}$, $\{\{m, k, h\}, \{b\}\}$, $\{\{b, k, h\}, \{m\}\}$, yaitu sebanyak 4 cara.
- Cara memasukkan dua bola dalam satu tabung dan dua bola dalam tabung yang lain adalah $\{\{m, b\}, \{k, h\}\}$, $\{\{m, k\}, \{b, h\}\}$, $\{\{m, h\}, \{b, k\}\}$, yaitu sebanyak 3 cara.
- Cara memasukkan dua bola dalam satu tabung dan kedua bola lainnya masing-masing di tabung yang berbeda adalah $\{\{m, b\}, \{k\}, \{h\}\}$, $\{\{m, k\}, \{b\}, \{h\}\}$, $\{\{m, h\}, \{b\}, \{k\}\}$, $\{\{b, k\}, \{m\}, \{h\}\}$, $\{\{b, h\}, \{m\}, \{k\}\}$, $\{\{k, h\}, \{m\}, \{b\}\}$, yaitu sebanyak 6 cara.

Jadi, ada sebanyak $1 + 4 + 3 + 6 = 14$ hasil yang dapat diperoleh pemain tersebut.

Semua pembahasan di atas hanya berlaku jika objek-objeknya berbeda. Kini kita akan membahas cara menghitung seperti di atas jika objek-objeknya identik. Di sini tentu hanya dibahas pembagian di mana masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas, sebab jika setiap kotak harus memuat objek dengan jumlah yang spesifik, maka hanya ada satu cara melakukan pembagian tersebut. Kita mulai dengan masalah menghitung banyaknya cara membagikan n objek identik ke dalam k kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas.

Ilustrasinya adalah sebagai berikut. Misalkan di tangan kita terdapat sebuah kantong yang berisi 10 bola dengan warna yang sama, misalkan

semuanya berwarna merah. Kita akan memasukkan bola-bola tersebut ke dalam 3 kotak yang bernomor 1, 2, 3 dengan jumlah yang bebas, sehingga tidak ada lagi bola yang tersisa. Hal pertama yang kita perhatikan adalah bahwa setelah kita selesai melakukan proses memasukkan bola-bola tersebut, maka jumlah semua bola yang ada di dalam ketiga kotak tersebut adalah 10. Jadi, jika kita memisalkan x_1 menyatakan banyaknya bola dalam kotak ke-1, x_2 menyatakan banyaknya bola dalam kotak ke-2, dan x_3 menyatakan banyaknya bola dalam kotak ke-3, maka ketiga variabel yang nonnegatif ini memenuhi persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Jadi, menghitung banyaknya cara memasukkan bola-bola tersebut sama dengan menghitung banyaknya solusi persamaan ini, yaitu

$$C(3+10-1,10) = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 1 \times 10!} = 66$$

cara.

Dengan cara serupa kita dapat memperumum gagasan ini jika kita akan memasukkan n bola dengan warna yang sama ke dalam k kotak yang berbeda sehingga masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas, yaitu $C(k + n - 1, n)$

Pembagian n Objek Identik ke dalam k Kotak Berbeda dengan Masing-masing Kotak Memuat Objek dengan Jumlah yang Bebas

Banyaknya cara membagikan n objek identik ke dalam k kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas adalah

$$C(k + n - 1, n)$$

Contoh 2.6.5

Berapa banyak cara memilih delapan koin dari sebuah tabungan yang terdiri atas 100 keping koin lima ratusan dan 80 keping koin seribuan?

Jawab

Informasi 100 keping dan 80 keping tidak kita perlukan dalam penghitungan. Hal ini hanya menjamin bahwa ada paling sedikit 8 keping koin lima ratusan dan paling sedikit 8 keping koin seribuan. Informasi yang kita

perlukan adalah bahwa terdapat dua jenis koin. Sekarang misalkan kita telah mengambil kedelapan koin tersebut. Tentu banyaknya koin lima ratusan dan koin seribuan yang terambil berjumlah 8. Jadi, seperti ilustrasi di atas, masalah ini dapat kita pandang sebagai masalah membagikan 8 objek identik ke dalam 2 kotak berbeda. Banyaknya cara pembagian ini adalah

$$C(2+8-1,8)=\frac{9!}{1!8!}=\frac{9\times 8!}{8!}=9$$

cara.

Kini kita akan memerhatikan masalah terakhir, yaitu pembagian objek-objek identik ke dalam kotak-kotak identik. Tidak ada rumus singkat yang dapat membantu dalam kasus ini, sehingga kita hanya dapat menghitungnya dengan menuliskan satu demi satu kemungkinan.

Contoh 2.6.6

Berapa banyak cara mengepak enam salinan buku ke dalam empat kotak, jika setiap kotak dapat memuat maksimal enam buku?

Jawab

Kita menghitungnya dengan menuliskan satu demi satu kemungkinan, yaitu {6}, {5,1}, {4,2}, {4,1,1}, {3,3}, {3,2,1}, {3,1,1,1}, {2,2,2}, {2,2,1,1}. Jadi, terdapat 9 cara membungkus buku-buku tersebut.

Masalah menghitung banyaknya cara membagikan n objek identik ke dalam k kotak identik dengan masing-masing kotak memuat objek dengan jumlah bebas sama dengan masalah menghitung banyaknya cara menuliskan suatu bilangan asli n sebagai hasil penjumlahan dari paling banyak k bilangan bulat positif.

Sebagai rangkuman pembahasan ini, kita mengenal dua tipe objek, yaitu objek berbeda, misalnya "tiga bola berwarna merah, biru, dan hijau" dan objek identik, misalnya "tiga buah bola". Selain itu kita mengenal pula dua tipe kotak, yaitu kotak berbeda, misalnya "dua kotak bernomor 1 dan 2" dan kotak identik, misalnya "dua kotak". Dari sini kita mempunyai empat jenis masalah, yaitu:

1. *Membagikan objek-objek berbeda ke dalam kotak-kotak berbeda*, misalnya "berapa banyak cara membagikan tiga bola berwarna merah, biru, dan hijau ke dalam dua kotak bernomor 1 dan 2?". Masalah ini dapat dispesifikkan, misalnya menjadi "berapa banyak cara membagikan tiga bola berwarna merah, biru, dan hijau ke dalam dua kotak bernomor 1 dan 2 sehingga kotak bernomor 1 terisi 1 bola dan kotak bernomor 2 terisi 2 bola?"
2. *Membagikan objek-objek berbeda ke dalam kotak-kotak identik*, misalnya "berapa banyak cara membagikan tiga bola berwarna merah, biru, dan hijau ke dalam dua kotak?". Masalah ini dapat dispesifikkan, misalnya menjadi "berapa banyak cara membagikan tiga bola berwarna merah, biru, dan hijau ke dalam dua kotak, sehingga masing-masing kotak berisi 1 bola dan 2 bola?"
3. *Membagikan objek-objek identik ke dalam kotak-kotak berbeda*, misalnya "berapa banyak cara membagikan tiga bola ke dalam dua kotak bernomor 1 dan 2?"
4. *Membagikan objek-objek identik ke dalam kotak-kotak identik*, misalnya "berapa banyak cara membagikan tiga bola ke dalam dua kotak?"

Cara-cara menyelesaikan masalah-masalah ini telah kita bahas sebelumnya. Permasalahannya di sini adalah kita harus mampu melihat dan membedakan setiap masalah menurut keempat kategori yang ada.

Soal

2.80 Sebuah museum bahari memiliki lima belas macam miniatur kapal kuno. Pihak pengurus museum bermaksud menempatkan kelimabelas miniatur kapal tersebut ke dalam empat ruang pameran. Ruang pameran pertama akan ditempati lima miniatur, ruang kedua akan ditempati tiga miniatur, ruang ketiga akan ditempati empat miniatur, dan sisanya ditempatkan pada ruang keempat. Berapa banyak cara menempatkan miniatur-miniatur kapal tersebut?

2.81 Petugas pengawasan hewan dari sebuah organisasi yang mengelola beberapa kebun binatang memiliki dua belas ekor harimau benggala

yang identik. Berapa banyak cara mengirimkan harimau-harimau ini pada tiga kebun binatang masing-masing di kota Surabaya, Jakarta, dan Bandung untuk dipelihara?

2.82 Dalam berapa cara delapan surat yang sama dapat dimasukkan ke dalam tiga kotak pos yang tidak terbedakan?

2.83 Delapan buah mobil berbeda akan dibawa ke bengkel untuk diperbaiki. Jika di kota itu terdapat tiga bengkel yang berbeda, berapa banyak cara memperbaiki kedelapan mobil tersebut?

2.84 Dalam suatu kelas yang terdiri dari 28 orang, di antaranya telah ditentukan 4 calon ketua kelas. Setiap siswa diminta memilih salah satu di antara keempat calon tersebut dan hasil pemilihan akan dihitung dengan turus (*tally*). Berapa banyak hasil penghitungan yang dapat terjadi jika:

a. Keempat calon ikut memilih dan boleh memilih siapapun termasuk dirinya sendiri.
b. Keempat calon tidak ikut memilih.

2.85 Dalam seminggu terjadi lima kali kasus pembunuhan. Berapa banyak kombinasi hari-hari di mana kelima kasus pembunuhan itu terjadi?

2.86 Seleksi anggota paduan suara diikuti 12 orang peserta.

a. Berapa banyak cara membagi peserta-peserta tersebut menjadi paling banyak tiga kelompok dengan jumlah anggota yang sama?
b. Berapa banyak cara membagi peserta-peserta tersebut menjadi tiga kelompok yang masing-masing terdiri dari 5 orang, 4 orang, dan 3 orang?
c. Berapa banyak cara membagi peserta-peserta tersebut menjadi tiga kelompok, sehingga 5 orang diseleksi di tahap pertama, 4 orang diseleksi di tahap kedua, dan 3 orang diseleksi tahap di ketiga?
d. Berapa banyak cara membagi peserta-peserta tersebut menjadi empat kelompok yang masing-masing terdiri dari 6, 2, 2, dan 2 orang?

e. Berapa banyak cara membagi peserta-peserta tersebut menjadi empat kelompok, sehingga 6 orang diseleksi di tahap pertama, 2 orang diseleksi di tahap kedua, 2 orang diseleksi tahap di ketiga, dan 2 orang diseleksi tahap di keempat?

2.87 Berapa banyak cara meletakkan tiga bola ke dalam lima kotak jika masing-masing kotak harus memuat paling banyak satu bola dan:

a. Bola dan kotak keduanya berbeda.
b. Bola berbeda tetapi kotak identik.
c. Bola identik tetapi kotak berbeda.
d. Bola dan kotak keduanya identik.

2.88 Berapa banyak cara meletakkan lima bola ke dalam tiga kotak jika masing-masing kotak harus memuat paling sedikit satu bola dan:

a. Bola dan kotak keduanya berbeda.
b. Bola berbeda tetapi kotak identik.
c. Bola identik tetapi kotak berbeda.
d. Bola dan kotak keduanya identik.

2.7 Prinsip Rumah Merpati

Bayangkan jika seorang peternak memiliki tiga rumah burung merpati. Mula-mula ia membeli seekor burung merpati lalu menempatkannya di salah satu rumah merpati yang dipunyainya. Kemudian ia membeli lagi seekor burung merpati lalu menempatkannya di salah satu rumah merpati tersebut. Dalam penempatan merpati kedua ini, selain ia dapat menempatkannya di rumah yang sama dengan merpati pertama, ia juga dapat menempatkannya di rumah yang berbeda dengan merpati pertama tadi. Misalkan ia menempatkannya di rumah yang berbeda. Kemudian ia membeli lagi merpati ketiga. Merpati ketiga ini masih dapat ia tempatkan di rumah yang berbeda dengan merpati pertama dan kedua, yaitu di rumah ketiga. Tetapi, jika ia membeli lagi merpati keempat, ia tidak memiliki lagi rumah yang kosong. Oleh karena itu, merpati keempat haruslah ia tempatkan pada salah satu rumah yang telah berisi merpati lain. Dengan kata lain, pasti ada suatu rumah yang berisi dua merpati. Memang kita tidak dapat menentukan secara

pasti apakah itu rumah pertama atau kedua atau ketiga, tetapi kita dapat memastikan keberadaan rumah yang berisi dua merpati.

Dari masalah menempatkan burung-burung merpati ini muncullah suatu prinsip yang dikenal sebagai prinsip rumah merpati atau *pigeonhole principle*. Prinsip ini pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pada tahun 1834, sehingga prinsip ini juga dikenal dengan istilah prinsip laci Dirichlet atau *Dirichlet's drawer principle*. Secara umum, prinsip ini mengatakan sebagai berikut.

Prinsip Rumah Merpati

Misalkan n suatu bilangan asli. Jika sebanyak $n + 1$ objek ditempatkan ke dalam n kotak, maka pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang berisi dua objek atau lebih.

Hal ini mudah diterima, sebab jika n kotak tersebut masing-masing berisi paling banyak satu objek, maka banyaknya objek paling banyak adalah n. Karena kita mulai dengan $n + 1$ objek, maka pasti terdapat kotak yang berisi paling sedikit dua objek.

Sekali lagi, prinsip rumah merpati tidak mempedulikan kotak mana yang berisi paling sedikit dua objek. Prinsip ini hanya menjamin keberadaannya, tanpa menunjukkan secara spesifik kotak manakah itu.

Tentu saja prinsip rumah merpati tidak hanya dimanfaatkan pada masalah penempatan burung merpati di atas. Beberapa kasus sederhana yang sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari pun menunjukkan berlakunya prinsip rumah merpati, misalnya sebagai berikut.

1. Jika kita akan mewarnai 10 buah lingkaran dan kita hanya memiliki 9 pensil warna, maka pasti terdapat paling sedikit 2 lingkaran yang kita warnai dengan warna yang sama.
2. Jika terdapat 5 pasang sepatu dan kita mengambil 6 sepatu secara acak, maka pasti terdapat paling sedikit sepasang sepatu yang terambil.
3. Di antara 3 orang, pasti terdapat paling sedikit 2 orang berjenis kelamin sama.
4. Di antara 13 orang, pasti terdapat paling sedikit 2 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

5. Jika dalam sebuah lift di suatu hotel dengan 7 lantai terdapat 8 orang, maka pasti terdapat paling sedikit dua orang yang turun dari lift di lantai yang sama.
6. Jika terdapat 11 pemain dalam sebuah tim sepak bola yang menang dengan angka 12-0, maka pasti terdapat paling sedikit satu pemain dalam tim tersebut yang membuat gol paling sedikit dua kali.

   Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 2.7.1

Nilai-nilai ujian setiap siswa merupakan bilangan-bilangan bulat dari 0 hingga 100. Berapa banyak siswa minimal yang harus dipilih secara acak, agar dapat dijamin bahwa ada dua siswa yang memiliki nilai ujian yang sama?

Jawab

Terdapat 101 kemungkinan nilai untuk setiap siswa, yaitu 0, 1, 2, . . ., 100. Menurut prinsip rumah merpati, harus dipilih 102 orang siswa agar kita dapat menjamin bahwa ada dua siswa yang memiliki nilai yang sama.

Contoh 2.7.2

Paling sedikit berapa bilangan yang harus kita pilih dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, supaya di antara bilangan-bilangan yang kita pilih pasti terdapat dua bilangan yang berjumlah 9?

Jawab

Kita perhatikan bahwa setiap bilangan dapat kita pasangkan dengan bilangan yang lain sehingga berjumlah 9. Seluruhnya terdapat empat kelompok, yaitu 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, serta 4 dan 5. Jika dipilih empat bilangan, masih mungkin keempat bilangan tersebut berasal dari kelompok yang berbeda-beda. Oleh karena itu kita harus memilih lima bilangan.

Contoh 2.7.3

Di dalam peti terdapat 4 bola merah, 5 bola biru, dan 3 bola kuning. Berapa banyaknya bola paling sedikit harus diambil secara acak agar kita dapat menjamin bahwa:

a. Pasti terambil dua bola berwarna sama?
b. Pasti terambil dua bola berwarna berbeda?

Jawab

a. Kemungkinan terburuk adalah ketika kita telah mengambil sebanyak tiga kali dan ketiga-tiganya terambil berwarna berbeda. Maka untuk dapat menjamin bahwa pasti terambil dua bola berwarna sama, kita harus mengambil empat kali.
b. Kemungkinan terburuk adalah ketika kita telah mengambil sebanyak lima kali dan kelima-limanya terambil bola biru. Maka untuk dapat menjamin bahwa pasti terambil dua bola berwarna berbeda, kita harus mengambil enam kali.

Soal

2.89 Suatu kelas sedang membentuk kelompok untuk praktikum biologi. Ternyata terbentuk sebanyak lima kelompok. Pada saat hari pembentukan kelompok tersebut, ada enam orang siswa yang tidak masuk karena sakit sehingga mereka belum terdaftar dalam kelompok yang sudah dibentuk. Tunjukkan bahwa paling sedikit terdapat dua siswa yang masuk ke kelompok yang sama.

2.90 Paling sedikit berapa bilangan yang harus diambil dari himpunan

$$A = \{2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{12}\}$$

agar dapat dijamin bahwa pasti terambil:

a. Dua bilangan dengan digit satuan yang sama?
b. Dua bilangan dengan digit satuan yang berbeda?

2.91 Tiga belas orang datang ke sebuah toko es krim yang menyediakan pilihan rasa coklat, vanilla, dan stroberi, serta pilihan sirup leci, durian, mangga, dan jeruk. Tunjukkan bahwa paling sedikit dua orang memesan es krim dengan rasa dan sirup yang sama.

2.92 Terdapat n pasangan suami istri. Paling sedikit berapa orang dari $2n$ orang tersebut harus dipilih agar terjamin bahwa pasti terpilih sepasang suami istri?

2.93 a. Paling sedikit berapa bilangan bulat yang harus kita pilih dari himpunan bilangan bulat agar terjamin pasti terdapat dua bilangan yang bersisa sama jika dibagi 3?

b. Paling sedikit berapa bilangan bulat yang harus kita pilih dari himpunan bilangan bulat agar terjamin pasti terdapat dua bilangan yang bersisa sama jika dibagi 7?

c. Paling sedikit berapa bilangan bulat yang harus kita pilih dari himpunan bilangan bulat agar terjamin pasti terdapat dua bilangan yang bersisa sama jika dibagi n?

2.94 Paling sedikit berapa bilangan yang harus dipilih dari barisan bilangan

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 100$$

agar terjamin bahwa di antara bilangan-bilangan yang kita pilih pasti terdapat dua bilangan yang:

a. Berjumlah 101.

b. Berjumlah 104.

c. Berselisih 3.

2.95 Kita dapat memperumum kasus dalam contoh 2.7.2 dan soal 2.94 di atas sebagai berikut. Paling sedikit berapa bilangan yang harus dipilih dari barisan bilangan

$$\{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (2n - 1)b\}$$

agar terjamin bahwa di antara bilangan-bilangan yang kita pilih pasti terdapat dua bilangan yang:

a. Berjumlah $2a + (2n - 1)b$.

b. Berselisih b.

2.96 Di dalam laci terdapat 10 kaos kaki putih, 11 kaos kaki hitam, 17 kaos kaki merah, 4 kaos kaki biru, 1 kaos kaki kuning, dan 1 kaos kaki hijau. Paling sedikit berapa kaos kaki yang harus diambil agar setidaknya:

a. Terambil dua kaos kaki yang berwarna sama.

b. Terambil dua kaos kaki yang berwarna berbeda.

2.97 Dari setumpuk kartu remi lengkap, tentukan paling sedikit berapa kartu yang harus diambil secara acak agar terjamin bahwa:

a. Terambil dua kartu dengan gambar yang sama.

b. Terambil dua kartu hati.

c. Terambil dua kartu dengan angka (besar) yang sama.

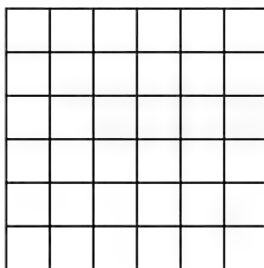
d. Terambil dua kartu dengan angka 9.

2.98 Di sebuah kantong terdapat 100 buah apel, 100 buah jeruk, 100 buah pisang, dan 100 buah pir. Setiap menit diambil satu buah dari kantong itu. Berapa waktu yang dibutuhkan untuk menjamin bahwa pasti sudah terambil minimal selusin buah dengan jenis yang sama?

2.99 Dari satu set kartu remi lengkap dibuang selembar kartu secara acak. Seseorang akan mengambil kartu satu demi satu dari tumpukan sisanya. Supaya terjamin bahwa di antara kartu-kartu yang terambil pasti ada kartu yang berwarna sama dengan kartu yang dibuang tadi, paling sedikit harus berapa kartu yang diambil?

2.100 Buktikan bahwa di antara sembarang $n + 1$ bilangan bulat, pasti terdapat dua di antaranya yang selisihnya habis dibagi n.

Petunjuk : Selidiki dulu untuk beberapa nilai n yang kecil. Lihat kembali soal 2.93.

2.101 Perhatikan petak-petak berukuran 6×6 berikut.

Tunjukkan bahwa tidak mungkin mengisi setiap petak tersebut dengan "+1" atau "–1" sehingga jumlah keenam isian secara vertikal, horisontal, maupun diagonal semuanya berbeda.

Petunjuk : Ada berapa kemungkinan jumlah isian? Ada berapa cara menjumlahkan yang hasilnya harus semuanya berbeda?

2.102 Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah permutasi dari bilangan-bilangan 1, 2, ..., n dengan n merupakan bilangan ganjil. Buktikan bahwa hasil kali

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$$

merupakan bilangan genap.

Petunjuk : Karena n ganjil, maka banyaknya bilangan ganjil di $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah satu lebih banyak daripada yang genap. Supaya hasil kali itu genap, harus ada minimal salah satu dari $(a_k - k)$ yang genap. Itu terjadi jika a_k dan k keduanya ganjil atau keduanya genap.

2.103 Beberapa orang duduk mengelilingi sebuah meja bundar dalam suatu restoran Cina. Setiap orang memesan makanan-makanan yang berbeda. Makanan-makanan tersebut diletakkan pada platform berbentuk lingkaran di tengah-tengah meja, dan platform tersebut dapat berputar. Namun ternyata tak seorangpun mendapatkan makanan di depannya sesuai dengan yang dipesan. Tunjukkan bahwa kita dapat memutar platform tersebut sehingga minimal dua orang menerima makanan sesuai dengan yang dipesan.

Petunjuk : Misalkan banyaknya orang adalah n. Pandang salah satu orang. Makanan yang ada di depannya bukan miliknya. Lantas, ada berapa kemungkinan letak makanan miliknya?

Prinsip rumah merpati dapat digunakan dalam memecahkan bermacam-macam masalah dengan berbagai tingkat kesulitan. Salah satu di antaranya adalah masalah perkenalan. Dengan cara memandang yang tepat yaitu apakah yang menjadi objek dan apakah yang menjadi kotak, permasalahan perkenalan seperti pada contoh di bawah ini dapat diselesaikan. Perhatikan bahwa perkenalan bersifat simetris, artinya jika A mengenal B, maka B pasti juga mengenal A.

Contoh 2.7.4

Misalkan terdapat lima orang yang dipilih secara acak. Beberapa orang saling mengenal satu sama lain, beberapa tidak saling mengenal. Buktikan

bahwa pasti terdapat dua orang dalam ruangan itu yang memiliki banyak kenalan yang sama.

Jawab

Misalkan terdapat 5 orang dalam ruangan itu, maka banyaknya kenalan setiap orang yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3, 4. Ada sebanyak 5 kemungkinan banyaknya kenalan yang dimiliki oleh 5 orang tersebut. Tetapi kita mengetahui bahwa perkenalan bersifat simetris. Oleh sebab itu, kemungkinan banyaknya kenalan 0 dan 4 tidak mungkin terjadi sekaligus. Artinya, jika ada orang yang memiliki sebanyak 0 kenalan, maka dalam ruangan itu tidak mungkin ada orang lain yang memiliki sebanyak 4 kenalan. Demikian pula sebaliknya jika ada orang yang memiliki sebanyak 4 kenalan, maka dalam ruangan itu tidak mungkin ada orang lain yang memiliki sebanyak 0 kenalan. Dengan kata lain, kemungkinan banyak kenalan bukanlah sebanyak 5, melainkan sebanyak 4. Jadi, berdasarkan prinsip rumah merpati dengan 5 objek dan 4 kotak, terbukti bahwa pasti terdapat dua orang dalam ruangan itu yang memiliki banyak kenalan yang sama.

Contoh ini dapat diperumum yaitu jika terdapat bukan lima orang, melainkan sebanyak n orang, dengan $n \geq 2$. Pembuktian dapat dikerjakan dengan cara yang sama. Hal ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan berikut.

Soal

2.104 Buktikan bahwa di antara sembarang n orang, dengan $n \geq 2$, pasti terdapat dua orang yang memiliki banyak kenalan yang sama.

Contoh 2.7.5

Seorang siswa yang akan menempuh ujian mempunyai 37 hari untuk persiapan. Dari pengalaman sebelumnya, ia mengetahui bahwa ia memerlukan waktu tidak lebih dari 60 jam untuk belajar, dan ia belajar paling sedikit satu jam per hari. Buktikan bahwa pasti terdapat suatu periode hari di mana jumlah jam belajar siswa tersebut tepat 13 jam.

Jawab

Kita misalkan a_1 menyatakan jumlah jam belajar pada hari pertama, a_2 menyatakan jumlah jam belajar pada hari pertama dan kedua, a_3 menyatakan jumlah jam belajar pada hari pertama, kedua, dan ketiga, dan seterusnya. Maka kita melihat bahwa

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{37}$$

adalah barisan bilangan bulat positif berbeda yang monoton naik (setiap suku bernilai lebih dari suku sebelumnya), dengan

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{37} \leq 60$$

karena jumlah jam belajarnya paling sedikit 1 jam dan paling banyak 60 jam. Oleh sebab itu dengan menambahkan setiap ruas dengan 13 kita memperoleh

$$14 \leq a_1 + 13 < a_2 + 13 < a_3 + 13 < \ldots < a_{37} + 13 \leq 73$$

Artinya kita memiliki barisan baru yaitu

$$a_1 + 13, a_2 + 13, a_3 + 13, \ldots a_{37} + 13$$

yang jika digabungkan dengan barisan yang pertama tadi, akan terbentuk barisan gabungan

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{37}, a_1 + 13, a_2 + 13, a_3 + 13, \ldots a_{37} + 13$$

Barisan gabungan ini terdiri dari sebanyak $2 \times 37 = 74$ bilangan asli yang mempunyai kemungkinan nilai 1, 2, 3, ..., 73. Berdasarkan prinsip rumah merpati (dengan 74 objek dan 73 kotak) kita dapat menjamin bahwa pasti terdapat paling sedikit dua bilangan yang bernilai sama. Karena kedua barisan tadi monoton naik, maka dua bilangan yang bernilai sama ini tidak mungkin berada pada barisan yang sama. Jadi, dua bilangan yang bernilai sama ini pasti berasal dari dua barisan yang berbeda. Akibatnya, kita dapat mengatakan bahwa pasti terdapat i dan j sehingga

$$a_i = a_j + 13$$

Hal ini berarti selama hari ke-$(j + 1)$ sampai dengan hari ke-i, siswa tersebut belajar selama tepat 13 jam.

Soal

2.105 Dalam waktu 5 minggu, seorang apoteker menerima permintaan racikan obat paling sedikit 1 permintaan per hari tetapi tidak lebih dari 9 permintaan per minggu. Tunjukkan bahwa ia pernah meracik sebanyak tepat 6 obat dalam beberapa hari berurutan.

2.106 Apakah pernyataan dalam soal sebelumnya tetap benar jika angka 6 diganti dengan:

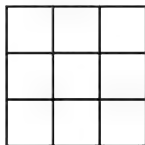
a. 2 b. 7 c. 8

Beberapa masalah penggunaan prinsip rumah merpati muncul di geometri. Salah satu contohnya adalah sebagai berikut.

Contoh 2.7.6

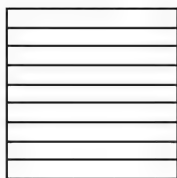
Sepuluh titik berbeda terletak pada sebuah persegi dengan panjang sisi 3 satuan. Buktikan bahwa pasti terdapat dua titik yang berjarak maksimal $\sqrt{2}$ satuan.

Jawab

Kita memandang kesepuluh titik yang dimaksud sebagai objek-objeknya. Tugas kita adalah membuktikan keberadaan dua titik yang terletak berdekatan satu sama lain, dalam arti jarak maksimalnya adalah $\sqrt{2}$ satuan. Artinya, kita harus mempunyai sebanyak sembilan kotak untuk menjamin hal tersebut. Oleh karena itu, kita membagi persegi dengan panjang sisi 3 satuan tersebut menjadi 9 persegi satuan seperti pada gambar di bawah:

Selanjutnya, menurut prinsip rumah merpati, terlihat bahwa di antara sepuluh titik yang kita pilih, pasti paling sedikit dua di antaranya berada di dalam salah satu persegi satuan tersebut. Tentu jarak kedua titik tersebut tidak melebihi panjang diagonal persegi satuan, yaitu

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Jadi, terbukti bahwa pasti terdapat dua titik yang berjarak maksimal $\sqrt{2}$ satuan.

Pertanyaan yang timbul dari contoh 2.7.6 di atas adalah mengapa kita harus membagi persegi tersebut menjadi 9 persegi satuan? Mengapa kita tidak membaginya menjadi 9 bagian dengan bentuk lain? Misalnya, bisa saja kita membagi persegi tersebut menjadi 9 bagian sebagai berikut.

Kemudian, kita menyimpulkan bahwa pasti paling sedikit dua di antaranya berada di dalam salah satu persegi panjang bagian tersebut. Namun, dengan cara seperti ini kita tidak dapat menyimpulkan bahwa jarak kedua titik tersebut maksimal $\sqrt{2}$ satuan. Jadi, pembagian dengan cara ini tidak berhasil. Oleh karena itu, dalam menyelesaikan soal semacam ini, kita memerlukan cara pandang yang tepat.

Soal

2.107 Sebanyak 21 titik terletak di dalam suatu persegi dengan panjang sisi dua satuan panjang. Buktikan bahwa pasti terdapat lima titik yang jaraknya satu sama lain kurang dari $\sqrt{2}$ satuan panjang.

2.108 Sebanyak 17 titik terletak pada sebuah persegi dengan panjang sisi 4 satuan. Buktikan bahwa pasti terdapat dua titik yang jaraknya tidak lebih dari:

a. $\sqrt{2}$ satuan.

b. $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ satuan.

2.109 Lima titik berbeda terletak pada segitiga sama sisi dengan panjang sisi satu satuan panjang. Buktikan bahwa ada dua titik yang berjarak maksimal $\frac{1}{2}$ satuan panjang.

Para pembaca yang telah mempelajari trigonometri dapat memerhatikan satu contoh lain berikut ini.

Contoh 2.7.7

Dari tujuh bilangan real yang berbeda, tunjukkan bahwa kita dapat memilih dua di antaranya, misalnya x_1 dan x_2, yang memenuhi pertidaksamaan

$$0 < \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1x_2} < \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Jawab

Misalkan ketujuh bilangan real tersebut adalah x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, dan x_7. Jika kita perhatikan dengan cermat, bentuk

$$\frac{x_1 - x_2}{1 + x_1x_2}$$

mengingatkan kita pada formula tangent untuk selisih dua sudut, yaitu

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Oleh karena itu, akan berguna jika kita melakukan substitusi

$$x_i = \tan t_i$$

Untuk i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tetapi kita cukup membatasi interval setiap t_i menjadi

$$-\frac{\pi}{2} < t_i < \frac{\pi}{2}$$

agar terjamin bahwa pasti ada tepat satu nilai x_i untuk setiap nilai t_i.

Di sini kita memiliki tujuh nilai berbeda yang dapat diberikan pada x_i. Karena untuk setiap bilangan real tersebut ada tepat satu nilai t_i, maka kita memiliki tujuh nilai t_i.

Kini kita bagi interval $-\frac{\pi}{2} < t_i < \frac{\pi}{2}$ menjadi enam bagian (subinterval), yaitu $-\frac{\pi}{2} < t_i \leq -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} < t_i \leq -\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6} < t_i \leq 0$, $0 < t_i \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} < t_i \leq \frac{\pi}{3}$, dan $\frac{\pi}{3} < t_i < \frac{\pi}{2}$.

Sekarang kita memiliki tujuh nilai t_i yang terletak pada interval ini. Karena hanya terdapat enam subinterval, maka menurut prinsip rumah merpati, pasti ada dua nilai t_i yang terletak pada subinterval yang sama. Karena lebar

dari setiap subinterval di atas sama, yaitu $\frac{\pi}{6}$, maka kita dapat menjamin bahwa pasti ada dua nilai t_i, yang tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan t_1 dan t_2, sehingga

$$0 < t_1 - t_2 < \frac{\pi}{6}$$

Kita berikan tangent pada ketiga ruas, sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad \tan 0 < \tan(t_1 - t_2) < \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{\tan t_1 - \tan t_2}{1 + \tan t_1 \tan t_2} < \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} < \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Jadi, terbukti bahwa kita dapat memilih dua di antaranya, yaitu x_1 dan x_2, yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Dalam permasalahan geometri pada contoh 2.7.6 perlu diperhatikan cara membagi persegi tersebut, sedangkan dalam permasalahan trigonometri pada contoh 2.7.7 perlu diperhatikan cara membagi interval. Hal yang menjadi acuan dalam pembagian interval ini adalah lebar dari setiap interval, dalam contoh di atas dipilih $\frac{\pi}{6}$, yang pada akhirnya akan memunculkan bilangan $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, sehingga sesuai dengan yang diinginkan pada soal.

Soal

2.110 Buktikan bahwa dari lima bilangan real berbeda, kita dapat memilih dua di antaranya, misalnya a_1 dan a_2, yang memenuhi pertidaksamaan

$$0 \leq a_1 - a_2 < 1 + a_1 a_2$$

Sebelumnya kita telah membahas prinsip rumah merpati yang paling sederhana, yaitu jika terdapat $n + 1$ objek yang ditempatkan ke dalam n kotak, pasti terdapat minimal satu kotak yang ditempati lebih dari satu kotak. Prinsip ini dapat kita perumum menjadi sebagai berikut.

Prinsip Rumah Merpati Umum

Misalkan n dan $q_1, q_2, \ldots, q_n$ adalah bilangan-bilangan asli. Jika sebanyak

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n - n + 1$$

objek ditempatkan ke dalam n kotak, maka kotak pertama berisi paling sedikit q_1 objek, atau kotak kedua berisi paling sedikit q_2 objek, ..., atau kotak ke-n berisi paling sedikit q_n objek.

Hal ini juga mudah diterima, sebab jika n kotak tersebut masing-masing berisi paling banyak $q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_n - 1$ objek, maka banyaknya objek paling banyak adalah

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \ldots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \ldots + q_n - n$$

Karena kita mulai dengan $q_1 + q_2 + \ldots + q_n - n + 1$ objek, maka pasti terdapat kotak ke-i yang berisi paling sedikit q_i objek, untuk suatu bilangan bulat i, dengan $1 \leq i \leq n$.

Muncul kasus istimewa di sini, yaitu ketika $q_1, q_2, \ldots, q_n$ semuanya sama, sebutlah r. Jika ini terjadi, maka pernyataan prinsip rumah merpati umum di atas adalah jika sebanyak

$$\underbrace{r + r + \ldots + r}_{n} - n + 1 = nr - n + 1 = n(r-1) + 1$$

objek ditempatkan ke dalam n kotak, maka pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang berisi r objek atau lebih.

Kasus istimewa inilah yang sering kita gunakan dan kini kita rumuskan sebagai berikut.

Akibat Pertama Prinsip Rumah Merpati Umum

Misalkan n dan r bilangan-bilangan asli. Jika sebanyak $n(r - 1) + 1$ objek ditempatkan ke dalam n kotak, maka pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang berisi r objek atau lebih.

Sebagai penggunaannya, marilah kita perhatikan kembali masalah pada contoh 2.7.1.

Contoh 2.7.8

Nilai-nilai ujian setiap siswa merupakan bilangan-bilangan bulat dari 0

hingga 100. Paling sedikit berapa siswa yang harus dipilih secara acak, agar dapat dijamin bahwa:

a. Ada 2 siswa yang memiliki nilai ujian yang sama?
b. Ada 3 siswa yang memiliki nilai ujian yang sama?
c. Ada m siswa yang memiliki nilai ujian yang sama?

Jawab

a. Kita telah mengetahui bahwa terdapat 101 kemungkinan nilai untuk setiap siswa, yaitu 0, 1, 2, ..., 100, maka harus dipilih 102 siswa. Hal ini sesuai dengan prinsip rumah merpati umum, kita menginginkan ada 2 siswa yang mempunyai nilai ujian yang sama, maka kita pandang siswa sebagai objek dan kemungkinan-kemungkinan nilai sebagai kotak. Maka kita harus memilih

$$101(2 - 1) + 1 = 102$$

siswa.

b. Dengan menggunakan akibat di atas dengan 101 objek dan diinginkan paling sedikit satu kotak berisi paling sedikit 3 objek, maka kita harus memilih

$$101(3 - 1) + 1 = 203$$

siswa.

c. Dengan menggunakan akibat di atas dengan 101 objek dan diinginkan paling sedikit satu kotak berisi paling sedikit m objek, maka kita harus memilih

$$101(m - 1) + 1 = 101m - 100$$

siswa.

Contoh 2.7.9

Buktikan bahwa dari 1000 orang pasti terdapat minimal tiga orang yang berulang tahun pada tanggal yang sama.

Jawab

Kita gunakan prinsip rumah merpati umum dengan memandang kotak-kotak sebagai 366 kemungkinan hari dalam setahun (termasuk 29 Februari). Jika diinginkan minimal satu kotak yang berisi minimal 3 objek, maka paling sedikit harus terdapat

$$366(3 - 1) + 1 = 733$$

objek. Jadi, karena terdapat 1000 objek, menurut prinsip rumah merpati umum terbukti bahwa pasti terdapat minimal tiga orang yang berulang tahun pada tanggal yang sama.

Jika kita perhatikan, dalam contoh 2.7.9 di atas kembali diperlihatkan bahwa sebanyak $n(r - 1) + 1$ objek yang dinyatakan dalam prinsip rumah merpati pada dasarnya merupakan batas minimal. Jadi, dalam prinsip rumah merpati ini sebenarnya dapat dikatakan "sebanyak $n(r - 1) + 1$ objek atau lebih", dalam arti sebagai berikut. Pernyataan untuk $n(r - 1) + 1$ objek berlaku pula untuk $n(r - 1) + 2$ objek, $n(r - 1) + 3$ objek, dan seterusnya sampai dengan $n(r - 1) + n$ objek. Sebenarnya pernyataan ini berlaku pula untuk $n(r - 1) + n + 1$ objek dan seterusnya, namun untuk $n(r - 1) + n + 1 = nr + 1$ objek dan seterusnya sudah pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang bukan hanya berisi r objek atau lebih, melainkan berisi $r + 1$ objek atau lebih.

Berikut adalah variasi masalah yang lain. Jika dalam contoh tersebut tidak diketahui informasi "minimal tiga orang" yang harus kita buktikan, tetapi kita diminta menentukan banyaknya orang dari 1000 orang itu yang memiliki tanggal ulang tahun yang sama. Untuk itu kita perhatikan bentuk

$$\frac{n(r-1)+1}{n}$$

Bentuk ini dapat kita tulis menjadi

$$\frac{n(r-1)+1}{n} = r - \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Karena r merupakan bilangan asli dan $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$, maka kita dapat mengatakan bahwa jika kita membulatkan hasil pembagian

$$\frac{n(r-1)+1}{n}$$

ke atas, maka kita akan memperoleh hasil pembulatan yang nilainya sama dengan r, yaitu banyaknya objek yang terjamin ada dalam minimal salah satu kotak.

Pembulatan ke atas dapat dituliskan sebagai *fungsi ceiling* (fungsi atap), yaitu fungsi yang memetakan suatu bilangan real ke bilangan bulat terkecil yang lebih besar darinya. Fungsi ceiling dari x dinotasikan $\lceil x \rceil$. Sebagai contoh, $\lceil 2{,}54 \rceil = 3$, $\lceil 1{,}01 \rceil = 2$, $\lceil -\pi \rceil = -3$. Jadi, dengan fungsi ceiling ini kita memperoleh

$$\left\lceil \frac{n(r-1)+1}{n} \right\rceil = r$$

Selanjutnya untuk mempersingkat penulisan, kita memperkenalkan sebuah variabel baru, yaitu

$$N = n(r - 1) + 1$$

dan kita mendapatkan rumusan berikut.

Akibat Kedua Prinsip Rumah Merpati Umum

Misalkan N dan n bilangan-bilangan asli. Jika sebanyak N objek ditempatkan ke dalam n kotak, maka pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang berisi $\left\lceil \frac{N}{n} \right\rceil$ objek atau lebih.

Dengan rumusan ini kita dapat menyelesaikan variasi masalah yang tadi telah dikemukakan, yang kita bahas dalam contoh berikut.

Contoh 2.7.10

Dari 1000 orang, berapa banyak yang terjamin mempunyai tanggal ulang tahun yang sama?

Jawab

Kita gunakan akibat di atas dengan memandang kotak-kotak sebagai 366 kemungkinan hari dalam setahun (termasuk 29 Februari). Dari 1000 orang yang merupakan objek-objeknya, maka pasti terdapat paling sedikit satu kotak yang berisi

$$\left\lceil \frac{1000}{366} \right\rceil = \lceil 2,\ldots \rceil = 3$$

objek. Jadi, dari 1000 orang, pasti terdapat 3 orang yang mempunyai tanggal ulang tahun yang sama.

Tentu saja akibat kedua ini juga dapat digunakan untuk menyelesaikan pembuktian seperti pada contoh 2.7.9. Berikut akan diberikan sebuah contoh lain.

Contoh 2.7.11

Dari hasil survei penduduk yang dilakukan di rumah-rumah penduduk, tercatat keberadaan 41 keluarga dan 127 anak. Buktikan bahwa pasti terdapat suatu keluarga yang mempunyai 4 anak.

Jawab

Dengan menggunakan akibat di atas dengan memandang kotak-kotak sebagai 41 keluarga dan 127 anak sebagai objek-objeknya, maka diperoleh bahwa pasti terdapat suatu keluarga yang mempunyai

$$\left\lceil \frac{127}{41} \right\rceil = \lceil 3,\ldots \rceil = 4$$

anak. Terbuktilah yang diinginkan.

Soal

2.111 Di sebuah kampus, setiap kelas dapat dijadwalkan dalam 38 jam kuliah berbeda. Jika terdapat 677 kelas yang harus dilaksanakan, berapa banyak ruangan yang diperlukan?

2.112 Sebanyak dua juta pohon dengan berbagai ukuran tumbuh di suatu hutan. Diketahui bahwa tidak ada pohon yang memiliki lebih dari 600.000 daun. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit tiga pohon di hutan itu yang memiliki banyak daun yang tepat sama.

2.113 Paling sedikit berapa orang yang harus dipilih agar kita dapat menjamin bahwa pasti terpilih enam orang yang berulang tahun di bulan yang sama?

2.114 Sebuah dadu dilempar.

a. Jika dilakukan 50 kali lemparan, berapa banyak lemparan yang terjamin memunculkan angka yang sama?

b. Paling sedikit berapa kali lemparan yang harus dilakukan agar terjamin bahwa pasti ada angka yang sama muncul empat kali?

2.115 Beberapa kartu diambil secara acak dari setumpuk kartu remi lengkap.

a. Jika diambil 15 kartu, berapa banyak di antara kartu yang diambil pasti mempunyai gambar yang sama?

b. Paling sedikit berapa kartu yang harus diambil agar terjamin bahwa pasti terdapat tiga kartu dengan angka (besar) yang sama?

c. Paling sedikit berapa kartu yang harus diambil agar terjamin pasti terdapat:

1) Dua kartu As.

2) Tiga kartu King.

3) Empat kartu bergambar hati.

2.116 Di daftar hadir suatu rapat besar termuat 139 nama tamu dan nama-nama tamu tersebut terdiri atas 4 sampai 26 karakter.

a. Tunjukkan bahwa pasti terdapat:

1) Enam tamu dengan huruf awal nama yang sama.

2) Tujuh tamu dengan nama yang mempunyai banyak karakter yang sama.

b. Paling sedikit berapa nama tamu yang harus termuat dalam daftar hadir tersebut agar kita dapat menjamin bahwa:

1) Pasti terdapat 2 tamu dengan huruf awal sekaligus banyak karakter nama yang sama?

2) Pasti terdapat 3 tamu dengan huruf awal sekaligus banyak karakter nama yang sama?

3) Pasti terdapat m tamu dengan huruf awal sekaligus banyak karakter nama yang sama?

Kini kita akan mencoba menyelesaikan sebuah masalah lain yang merupakan penggunaan dari prinsip rumah merpati umum.

Contoh 2.7.12

Terdapat sebanyak enam orang, setiap dua orang di antaranya merupakan pasangan sahabat atau pasangan musuh. Buktikan bahwa pasti terdapat tiga orang yang saling bersahabat atau tiga orang yang saling bermusuhan.

Jawab

Misalkan kita memandang salah satu di antara keenam orang tersebut, sebutlah A. Kelima orang yang lain bisa jadi merupakan sahabat dari A atau musuh dari A. Menurut prinsip rumah merpati dengan lima objek yang mewakili kelima orang tersebut dan dua kotak yang mewakili kotak sahabat A dan kotak musuh A,

$$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = \lceil 2,\ldots \rceil = 3$$

Artinya ada satu kotak yang berisi 3 objek, hal ini berarti kita dapat menjamin bahwa di antara kelima orang tersebut pasti terdapat 3 orang yang merupakan sahabat A atau 3 orang yang merupakan musuh A.

1. Kemungkinan pertama adalah terdapat 3 orang, sebutlah B, C, D, yang merupakan sahabat A. Kemungkinan pertama ini terdiri atas dua kasus.
   a. Jika ada dua di antara B, C, D yang saling bersahabat, maka mereka berdua bersama A merupakan tiga orang yang saling bersahabat.
   b. Jika tidak ada dua di antara B, C, D yang saling bersahabat, ini berarti mereka bertiga saling bermusuhan satu sama lain.
2. Kemungkinan kedua adalah terdapat 3 orang, sebutlah B, C, D, yang merupakan musuh A. Kemungkinan kedua ini terdiri atas dua kasus.
   a. Jika ada dua di antara B, C, D yang saling bermusuhan, maka mereka berdua bersama A merupakan tiga orang yang saling bermusuhan.
   b. Jika tidak ada dua di antara B, C, D yang saling bermusuhan, ini berarti mereka bertiga saling bersahabat satu sama lain.

Jadi, bagaimanapun juga pasti terdapat tiga orang yang saling bersahabat atau tiga orang yang saling bermusuhan satu sama lain. Terbuktilah yang diinginkan.

Selanjutnya pertanyaan yang muncul adalah bagaimana jika bukan terdapat sebanyak enam orang melainkan hanya lima orang, apakah selalu terjamin bahwa terdapat tiga orang yang saling bersahabat atau tiga orang

yang saling bermusuhan? Jawabannya adalah tidak. Para pembaca dapat mencoba membuktikan hal ini sebagai latihan.

Kasus dalam contoh 2.7.12 di atas mendasari suatu teori yang disebut Teori Ramsey, yang ditemukan oleh matematikawan Inggris Frank Plumpton Ramsey. Dalam teori graf, masalah di atas dapat dipandang secara geometris sebagai berikut. Jika terdapat sebanyak enam titik dan setiap pasangan titik dihubungkan dengan garis dengan warna merah atau biru, buktikan bahwa pasti terdapat sebuah segitiga merah atau segitiga biru. Dalam contoh di atas, keenam titik tersebut menunjukkan keenam orang, serta garis-garis dengan warna merah atau biru menunjukkan hubungan sahabat atau musuh dari pasangan orang yang ada.

Banyaknya orang minimal yang harus ada agar terjamin bahwa pasti terdapat m orang yang saling bersahabat atau n orang yang saling bermusuhan dituliskan sebagai $R(m,n)$, yang disebut sebagai bilangan Ramsey. Dalam contoh di atas telah ditunjukkan bahwa $R(3,3) \leq 6$. Dengan menggunakan matematika yang lebih lanjut dapat diperlihatkan sebenarnya $R(3,3) = 6$.

Beberapa sifat bilangan Ramsey dapat kita buktikan, namun nilai eksak dari bilangan-bilangan tersebut sulit untuk ditentukan. Sejauh ini hanya nilai eksak dari sembilan bilangan Ramsey yang telah diketahui, seperti yang disajikan dalam tabel berikut. Selain kesembilan nilai eksak tersebut, nilai-nilai bilangan Ramsey lainnya dinyatakan dalam bentuk interval, misalnya $R(5,5)$ memenuhi $43 \leq R(5,5) \leq 49$.

n \ m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59
4		18	25	35 41	49 61	56 84	72 115	92 149	97 191	128 238
5			43 49	58 87	80 143	101 216	124 316	142 442	158 633	184 871
6				102 165	112 298	127 495	169 780	178 1171	253 1804	262 2675

2.8 Koefisien Binomial

Kita telah mengenal bentuk kombinasi r objek dari n objek, yaitu

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

yang menyatakan banyaknya cara mengambil r objek dari n objek yang tersedia tanpa memerhatikan urutan. Pada bagian ini kita akan menggunakan pengetahuan kita tentang kombinasi dalam penjabaran binomial.

2.8.1 Gagasan Teorema Binomial

Misalkan kita akan menjabarkan atau mengekspansikan bentuk-bentuk berikut.

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$
$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$
$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$
$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

Hal yang paling utama dalam proses penjabaran ini, misalnya

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y) \qquad (1)$$

adalah bagaimana kita harus menentukan koefisien dari setiap suku hasil ekspansinya. Kita mengetahui bahwa suku-suku hasil ekspansinya adalah sebagai berikut.

$$(x+y)^5 = \ldots x^5 + \ldots x^4y + \ldots\, x^3y^2 + \ldots\, x^3y^2 + \ldots\, xy^4 + \ldots\, y^5 \qquad (2)$$

Kini kita bandingkan bentuk (2) dengan bentuk (1).

Untuk mengisi setiap titik-titik dalam bentuk (2), yaitu koefisien dari setiap suku, kita mengambil variabel y sebanyak yang sesuai (dan mengambil x dari sisanya) dari bentuk (1). Perhatikan bahwa dalam bentuk (1) tersedia 5 variabel x dan 5 variabel y.

a. Untuk menghasilkan suku x^5, kita mengambil sebanyak 0 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,0)$$

b. Untuk menghasilkan suku x^4y, kita mengambil sebanyak 1 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,1)$$

c. Untuk menghasilkan suku x^3y^2, kita mengambil sebanyak 2 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,2)$$

d. Untuk menghasilkan suku x^2y^3, kita mengambil sebanyak 3 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,3)$$

e. Untuk menghasilkan suku xy^4, kita mengambil sebanyak 4 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,4)$$

f. Untuk menghasilkan suku y^5, kita mengambil sebanyak 5 variabel y dari bentuk (1) dari 5 variabel y yang tersedia. Banyaknya cara melakukan pengambilan ini adalah

$$C(5,5)$$

Dalam setiap pengambilan kita tidak perlu lagi memperhitungkan pengambilan x, sebab ini akan terjadi dengan sendirinya. Misalnya jika kita mengambil sebanyak 3 variabel y, maka tentu 2 variabel lainnya yang belum diambil pastilah merupakan variabel x.

Jadi, hasil ekspansi bentuk tersebut adalah

$$(x + y)^5 = C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4y + C(5,2)x^3y^2 + C(5,3)x^2y^3 + C(5,4)xy^4 + C(5,5)y^5$$

Dengan menghitung hasil setiap kombinasinya diperoleh

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

2.8.2 Teorema Binomial

Uraian pada bagian sebelumnya memperlihatkan bahwa ternyata dalam masalah ekspansi binomial muncul masalah kombinatorik. Sekali lagi, kita ketahui bahwa kombinasi menyatakan banyaknya cara mengambil r objek dari sekumpulan n objek dengan urutan tak diperhatikan, yang dituliskan

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Dalam ekspansi binomial, kombinasi ini lebih sering dilambangkan

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

yang disebut *koefisien binomial*, karena menyatakan koefisien-koefisien setiap suku pada hasil penjabaran binomial tersebut.

Dengan melihat kembali proses penjabaran bentuk $(x+y)^5$ dengan menggunakan kombinasi di atas, kini kita akan mencoba menjabarkan bentuk $(x+y)^n$, dengan n adalah bilangan bulat positif. Kita perhatikan bahwa bentuk ini dapat kita tuliskan sebagai perkalian dari sebanyak n faktor $(x + y)$, yaitu

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n}$$

dan kita telah melihat bagaimana proses perkalian ini untuk $n = 5$.

Untuk membentuk suatu suku pada hasil perkalian ini, kita harus memilih salah satu dari x atau y dari masing-masing faktor. Dengan kata lain, sebagian faktor menyumbangkan x, sisanya menyumbangkan y. Banyaknya faktor yang menyumbangkan y merupakan suatu bilangan bulat, misalnya r dengan $0 \le r \le n$, dan faktor-faktor yang tersisa yaitu sebanyak $n - r$ menyumbangkan x, sehingga membentuk suku $x^{n-r} y^r$. Oleh karena itu, banyaknya suku yang berbentuk $x^{n-r} y^r$ ini sama dengan banyaknya cara kita memilih r variabel y dari n variabel y yang tersedia di setiap faktor. Jadi, koefisien $x^{n-r} y^r$ adalah $\binom{n}{r}$.

Hal ini berlaku untuk $r = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan hasil ekspansi ini adalah

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n} y^n$$

Inilah yang disebut sebagai *teorema binomial*.

Teorema Binomial

Misalkan x dan y adalah variabel, dan n adalah bilangan bulat positif, maka

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n} y^n$$

Contoh 2.8.2.1

Ekspansikan binomial $(x + y)^4$.

Jawab

Dalam mengekspansikan $(x + y)^4$, kita mengambil 0 variabel y untuk membentuk suku x^4, mengambil 1 variabel y untuk membentuk suku x^3y, mengambil 2 variabel y untuk membentuk suku x^2y^2, mengambil 3 variabel y untuk membentuk suku xy^3, dan mengambil 4 variabel y untuk membentuk suku y^4. Sehingga kita memperoleh

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

yang jika dihitung akan diperoleh hasil

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Contoh 2.8.2.2

Ekspansikan binomial $(2x - y)^3$.

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$(2x - y)^3 = [(2x) + (-y)]^3$$

dan dengan cara yang sama akan kita peroleh

$$[(2x) + (-y)]^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2(-y) + \binom{3}{2}(2x)(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3$$

yang jika dihitung akan diperoleh hasil

$$(2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

Contoh 2.8.2.3

Tentukan koefisien x^2 dari hasil ekspansi $(3x - 2)^9$.

Jawab

Untuk menentukan koefisien x^2 dari hasil ekspansi ini, tentu saja kita tidak perlu mengekspansikannya secara keseluruhan. Kita cukup memerhatikan suku yang memuat x^2 dari ekspansi bentuk tersebut. Kita perhatikan bahwa

$$(3x - 2)^9 = [(3x) + (-2)]^9$$

Artinya, untuk membentuk suku yang memuat x^2, kita harus mengambil 7 unsur (-2), sehingga dengan sendirinya terambil 2 unsur ($3x$). Jadi, suku yang memuat x^2 adalah

$$\binom{9}{7}(3x)^2(-2)^7 = -41472x^2$$

Jadi, koefisien x^2 adalah -41472.

Contoh 2.8.2.4

Tentukan koefisien x^4 dari hasil ekspansi $\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$.

Jawab

Di sini kita cukup memerhatikan suku yang memuat x^4 dari ekspansi bentuk tersebut. Kita perhatikan bahwa

$$\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 = \left[\left(2x^2\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^7$$

dan kita menginginkan suku yang memuat x^4. Misalkan untuk membentuk suku ini kita harus mengambil sebanyak r unsur $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, maka kita mengetahui bahwa suku-suku yang ada pada hasil ekspansi ini mempunyai bentuk

$$\binom{7}{r}\left(2x^2\right)^{7-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = \binom{7}{r}2^{7-r}x^{14-\frac{5}{2}r}$$

Karena kita menginginkan pangkat dari x adalah 4, maka haruslah

$$14 - \frac{5}{2}r = 4$$

$$\Leftrightarrow \qquad r = 4$$

Jadi, untuk membentuk suku ini kita harus mengambil sebanyak 4 unsur $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, sehingga dengan sendirinya terambil 3 unsur $\left(2x^2\right)$.

Jadi, suku yang memuat x^4 adalah

$$\binom{7}{4}\left(2x^2\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = 280x^4$$

Jadi, koefisien x^4 adalah 280.

Soal

2.117 Ekspansikan binomial

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^5$$

2.118 Tentukan koefisien-koefisien dari:

a. $(3y + 5)^5$, koefisien y^3

b. $(2a^2 - b)^8$, koefisien a^6b^5

c. $\left(3x^3-\frac{1}{x}\right)^8$, koefisien x^4

d. $\left(2p^2-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)^9$, koefisien p^3

2.119 Tentukan konstanta/suku independen/suku yang tak mengandung x dari:

a. $\left(2x^3-\frac{1}{3x}\right)^8$

b. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$

2.120 Tentukan nilai m, jika:

a. Koefisien x^3 dari $(mx - 4)^5$ adalah 4320.

b. Suku independen dari $\left(x^3+\frac{m}{x^2}\right)^{10}$ adalah 210.

c. Koefisien x^4 dan x^5 dari $(4 + mx)^8$ sama.

2.121 Pada ekspansi bentuk

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$$

pada suku ke berapakah x dan y memiliki pangkat yang sama?

2.122 Jika

$$\left(a+\frac{1}{2}x\right)^6 = b-96x+cx^2+\ldots$$

maka tentukan nilai $4a + b + c$.

2.123 Tentukan bilangan bulat nonnegatif terbesar n sehingga 2^n habis membagi koefisien y^{10} pada hasil ekspansi $(7y + 5)^{100}$.

2.8.3 Beberapa Akibat dan Identitas

Pada bagian ini kita akan melihat beberapa akibat dan identitas yang dipenuhi oleh koefisien-koefisien binomial. Ada tiga identitas penting yang akan kita bahas nantinya. Namun terlebih dahulu kita akan melihat beberapa akibat dari teorema binomial.

Kita lihat kembali ekspansi

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n$$

Jika kita subsitusikan $x = y = 1$, maka akan diperoleh akibat berikut.

Akibat 1

Untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Persamaan ini pernah kita lihat sebelumnya ketika kita membahas penggunaan kombinasi untuk menghitung banyaknya himpunan bagian.

Jika kita substitusikan $x = 1$ dan $y = -1$, maka akan diperoleh akibat berikut.

Akibat 2

Untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Dari akibat kedua ini dapat kita simpulkan suatu akibat lain dengan mengelompokkan semua suku yang bertanda sama ke dalam satu ruas.

Akibat 3

Untuk setiap bilangan asli genap n berlaku

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n-1}$$

dan untuk setiap bilangan asli ganjil n berlaku

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Selain akibat-akibat di atas, berikut ini akan dibahas identitas-identitas yang berlaku pada koefisien-koefisien binomial. Identitas yang akan dibahas adalah identitas kesimetrian, identitas Vandermonde, dan identitas Pascal.

Identitas 1 : Kesimetrian

Untuk bilangan-bilangan bulat nonnegatif n dan r sehingga $r \leq n$ berlaku

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

Identitas ini dapat kita buktikan dengan berbagai cara. Berikut akan diberikan tiga macam pembuktian yang berbeda.

Pembuktian 1 : *Pembuktian dengan Aljabar*

Cara paling mudah membuktikan identitas tersebut adalah dengan membuktikannya secara aljabar. Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} \\ &= \binom{n}{n-r}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Pembuktian 2 : *Pembuktian dengan Kombinatorik*

Perhatikan bahwa

$$\binom{n}{r}$$

menyatakan banyaknya cara memilih r objek dari n objek yang tersedia. Banyaknya cara memilih r objek dari n objek ini tentu sama saja dengan banyaknya cara memilih $n - r$ objek lainnya untuk dibuang, yaitu

$$\binom{n}{n-r}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Pembuktian 3 : *Pembuktian dengan Teorema Binomial*

Kita perhatikan bahwa dalam ekspansi binomial

$$(x + y)^n$$

koefisien suku $x^{n-r} y^r$ adalah

$$\binom{n}{r}$$

Tetapi dalam ekspansi binomial

$$(y + x)^n$$

koefisien suku $y^r x^{n-r}$ adalah

$$\binom{n}{n-r}$$

Namun kita mengetahui bahwa kedua binomial ini sama. Oleh karena itu, koefisien suku tersebut pada kedua binomial pasti sama. Jadi, terbukti bahwa

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Pembuktian dengan kombinatorik di atas dapat pula kita tuliskan dalam bahasa himpunan. Ada sebanyak $\binom{n}{r}$ himpunan bagian dengan r elemen dari suatu himpunan semesta dengan n elemen, dan ada sebanyak $\binom{n}{n-r}$ himpunan yang merupakan komplemen dari masing-masing himpunan bagian tersebut, dan banyaknya himpunan bagian sama dengan banyaknya komplemennya.

Kini kita akan melihat identitas yang lain, yaitu identitas Vandermonde, yang ditemukan oleh matematikawan Alexandre-Théophile Vandermonde pada abad ke-18.

Identitas 2 : Identitas Vandermonde

Untuk bilangan-bilangan bulat nonnegatif m, n, dan r sehingga $r \leq m$ dan $r \leq n$ berlaku

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{0} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{0}\binom{n}{r}$$

Identitas ini dapat dibuktikan dengan kombinatorik.

Pembuktian : ***Pembuktian dengan Kombinatorik***

Misalkan kita memiliki dua himpunan saling lepas masing-masing dengan m elemen dan n elemen. Banyaknya cara kita memilih r elemen dari gabungan kedua himpunan tadi adalah

$$\binom{m+n}{r}$$

Tetapi kita dapat menghitung dengan cara lain, yaitu dengan memerhatikan semua kemungkinan. Kemungkinan pertama, kita memilih r elemen tersebut semuanya dari himpunan pertama, maka banyaknya cara kita memilih adalah

$$\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

Kemungkinan kedua, kita memilih $r - 1$ elemen dari himpunan pertama dan 1 elemen dari himpunan kedua, maka banyaknya cara kita memilih adalah

$$\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}$$

Kemungkinan kedua, kita memilih $r - 2$ elemen dari himpunan pertama dan 2 elemen dari himpunan kedua, maka banyaknya cara kita memilih adalah

$$\binom{m}{r-2}\binom{n}{2}$$

Demikian seterusnya, hingga kemungkinan terakhir adalah kita memilih semua r elemen dari himpunan kedua, maka banyaknya cara kita memilih adalah

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}$$

Berdasarkan aturan penjumlahan kita memperoleh banyaknya cara pemilihan ini adalah

$$\binom{m}{r}\binom{n}{0}+\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{r-2}\binom{n}{2}+\ldots+\binom{m}{0}\binom{n}{r}$$

Jadi, dengan menyamakan kedua cara pandang ini, terbukti bahwa

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{r}\binom{n}{0}+\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{r-2}\binom{n}{2}+\ldots$$
$$+\binom{m}{0}\binom{n}{r}$$

Identitas yang terakhir adalah identitas Pascal, yaitu identitas yang menjadi dasar diperkenalkannya segitiga Pascal, yang biasanya telah dikenal terlebih dahulu sebelum mengenal teorema binomial.

Identitas 3 : Identitas Pascal

Untuk bilangan-bilangan asli n dan r sehingga $1 \le r \le n$ berlaku

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

Berikut juga akan diberikan tiga macam pembuktian yang berbeda untuk identitas ini.

Pembuktian 1 : *Pembuktian dengan Aljabar*

Kita akan membuktikan identitas ini dari ruas kanan ke ruas kiri. Kita perhatikan bahwa

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{[(n-1)-r]!r!}+\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!(r-1)!}$$

$$=(n-1)!\left[\frac{1}{(n-r-1)!r!}+\frac{1}{(n-r)!(r-1)!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{(n-r)+(r)}{(n-r)!r!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{n}{(n-r)!r!}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(n-r)!r!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$=\binom{n}{r}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

Pembuktian 2 : *Pembuktian dengan Kombinatorik*

Kita dapat menghitung banyaknya cara pemilihan r objek dari n objek yang tersedia dalam dua cara. Cara pertama tentu adalah

$$\binom{n}{r}$$

Cara yang kedua adalah sebagai berikut. Misalkan di antara n objek yang tersedia terdapat suatu objek

yang kita beri nama A. Maka terdapat dua kemungkinan, yaitu:

1. Kemungkinan pertama, A tidak termasuk dalam r objek yang kita pilih. Jika demikian, kita memilih r objek dari $n - 1$ objek yang tersedia selain A. Banyaknya cara pemilihan ini adalah
$$\binom{n-1}{r}$$
2. Kemungkinan kedua, A termasuk dalam r objek yang kita pilih. Jika demikian, kita tinggal memilih $r - 1$ objek yang lain dari $n - 1$ objek yang tersedia selain A. Banyaknya cara pemilihan ini adalah
$$\binom{n-1}{r-1}$$

Menurut aturan penjumlahan diperoleh banyaknya cara memilih r objek dari n objek yang tersedia, yaitu
$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$
Jadi, dengan menyamakan kedua cara pandang ini, terbukti bahwa
$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

Pembuktian 3 : *Pembuktian dengan Teorema Binomial*

Kita perhatikan bahwa
$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1}\\ &= x(x+y)^{n-1}+y(x+y)^{n-1}\end{aligned}$$
Jika binomial-binomial yang ada pada kedua ruas kita ekspansikan, kita perhatikan suku $x^{n-r}\,y^r$ pada kedua ruas. Koefisien suku $x^{n-r}\,y^r$ di ruas kiri adalah
$$\binom{n}{r}$$

Koefisien suku $x^{n-r} y^r$ di ruas kanan dapat kita hitung dengan cara menambahkan koefisien suku $x^{n-r} y^r$ dari hasil perkalian

$$x(x+y)^{n-1} = x\underbrace{(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n-1} \quad (1)$$

dengan koefisien suku $x^{n-r} y^r$ dari hasil perkalian

$$y(x+y)^{n-1} = y\underbrace{(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n-1} \quad (2)$$

Kita perhatikan bahwa untuk membentuk suku $x^{n-r} y^r$ dari hasil perkalian (1), kita harus memilih sebanyak r variabel y dari $n - 1$ faktor yang tersedia, sehingga dengan sendirinya terambil $n - 1 - r$ variabel x, supaya jika dikalikan dengan x akan membentuk suku $x^{n-r} y^r$. Banyaknya cara memilih variabel y ini adalah

$$\binom{n-1}{r}$$

Sedangkan untuk membentuk suku $x^{n-r} y^r$ dari hasil perkalian (2), kita harus memilih sebanyak $r - 1$ variabel y dari $n - 1$ faktor yang tersedia, sehingga dengan sendirinya terambil $n - 1 - (r - 1) = n - r$ variabel x, supaya jika dikalikan dengan y akan membentuk suku $x^{n-r} y^r$. Banyaknya cara memilih variabel y ini adalah

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Jadi, koefisien suku $x^{n-r} y^r$ di ruas kanan adalah

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Sehingga karena koefisien suku tersebut pada kedua ruas pasti sama, terbukti bahwa

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Dalam bahasa himpunan, pembuktian dengan kombinatorik di atas dapat pula dituliskan sebagai berikut. Dari sebanyak $\binom{n}{r}$ himpunan bagian dengan r elemen dari suatu himpunan dengan n elemen, ada sebanyak $\binom{n-1}{r-1}$ himpunan bagian yang memuat suatu elemen tertentu dan ada sebanyak $\binom{n-1}{r}$ himpunan bagian yang tidak memuat elemen tersebut.

Teknik pembuktian dengan kombinatorik seperti yang telah kita lakukan untuk ketiga identitas tadi disebut *two-way counting* (berhitung dalam dua cara). Disebut demikian, karena seperti yang telah kita lihat, dalam pembuktian-pembuktian tersebut memang kita menyelesaikan suatu masalah berhitung dalam dua cara pandang yang berbeda dengan tujuan menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh dari dua cara berhitung tersebut adalah sama. Dalam satu contoh dan soal-soal berikut kita akan mencoba menerapkan *two-way counting* untuk membuktikan persamaan-persamaan yang lain.

Contoh 2.8.3.1

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n berlaku

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

dengan berhitung dalam dua cara.

Jawab

Kita dapat membuktikan persamaan ini dengan memerhatikan kasus berikut. Misalkan kita memiliki tiga himpunan saling lepas A, B, dan C. Masing-masing himpunan tersebut terdiri atas n elemen. Dari gabungan ketiga himpunan ini, kita akan membentuk himpunan bagian dengan tiga anggota. Kita dapat menghitung banyaknya cara membentuk himpunan bagian ini dalam dua cara. Cara pertama adalah dengan memilih 3 elemen dari $3n$ elemen pada gabungan ketiga himpunan tersebut, yaitu sebanyak

$$\binom{3n}{3}$$

Cara kedua, kita perhatikan semua kemungkinan yang ada.

a. Kemungkinan pertama adalah kita memilih 3 elemen yang berasal dari satu himpunan. Proses ini dapat kita bagi menjadi dua langkah. Langkah pertama, kita pilih salah satu himpunan. Ada $\binom{3}{1} = 3$ cara memilih himpunan ini. Langkah kedua, kita pilih 3 elemen dari n elemen himpunan yang telah kita pilih. Ada $\binom{n}{3}$ cara memilih ketiga elemen ini. Sehingga menurut aturan perkalian diperoleh

$$3 \times \binom{n}{3} = 3\binom{n}{3}$$

b. Kemungkinan kedua adalah kita memilih 2 elemen yang berasal dari satu himpunan, dan 1 elemen lainnya berasal dari himpunan lain. Proses ini dapat kita bagi menjadi empat langkah. Langkah pertama adalah memilih dua himpunan yang akan kita pakai. Ada $\binom{3}{2} = 3$ cara memilih himpunan ini. Langkah kedua adalah memilih di antara kedua himpunan tersebut, mana yang akan kita ambil 2 elemennya dan mana yang akan kita ambil 1 elemennya. Ada 2 cara melakukan pemilihan ini. Langkah ketiga adalah memilih 2 elemen dari n elemen salah satu himpunan yang telah kita tentukan. Ada $\binom{n}{2}$ cara memilih kedua elemen ini. Langkah keempat adalah memilih 1 elemen dari n elemen himpunan lain yang telah kita tentukan. Ada $\binom{n}{1} = n$ cara memilih satu elemen ini. Sehingga menurut aturan perkalian diperoleh

$$3 \times 2 \times \binom{n}{2} \times n = 6n\binom{n}{2}$$

c. Kemungkinan ketiga adalah kita memilih 3 elemen berasal dari 3 himpunan yang berbeda. Dengan kata lain, dari 3 himpunan

yang ada, kita memilih masing-masing satu elemen. Banyaknya cara melakukan pemilihan ini adalah

$$\binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^3$$

Menurut aturan penjumlahan diperoleh banyaknya cara membentuk himpunan bagian ini adalah

$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Jadi, dengan menyamakan kedua cara pandang ini, terbukti bahwa

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Soal

2.124 Perhatikan persamaan

$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$$

yang berlaku untuk setiap bilangan-bilangan asli m dan n dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. Buktikan persamaan ini dengan berhitung dalam dua cara.

2.125 Persamaan

$$\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$$

berlaku untuk setiap bilangan asli n. Buktikan persamaan ini dengan berhitung dalam dua cara, yaitu dengan menghitung banyaknya himpunan bagian dengan $n - 1$ elemen dari suatu himpunan yang terdiri dari $2n$ elemen.

2.126 Misalkan x adalah suatu elemen himpunan A yang terdiri dari $2n$ elemen. Di antara himpunan-himpunan bagian dari A yang terdiri dari n elemen, hitunglah banyaknya himpunan bagian yang memuat x dan yang tidak memuat x. Simpulkan bahwa

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$$

2.127 Buktikan dengan berhitung dalam dua cara, bahwa untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n berlaku

$$\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n}$$

Petunjuk : Perhatikan suatu himpunan dengan $2n + 2$ elemen yang terdiri dari $2n$ elemen bilangan ganjil dan 2 elemen bilangan genap, misalnya A dan B. Hitunglah banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari $n + 1$ anggota dalam dua cara. Dengan memerhatikan persamaan pada soal 2.125, kita cukup membuktikan bahwa

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

2.128 Misalkan tersedia tiga kotak. Kotak pertama berisi n bola, sedangkan dua kotak lainnya kosong. Hitunglah banyaknya cara memindahkan n bola tersebut, sehingga pada kondisi akhir terdapat sebanyak $n - k$ bola dalam kotak pertama, $k - r$ bola pada kotak kedua, dan r bola pada kotak ketiga. Dengan dua cara penghitungan, simpulkan bahwa

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

2.129 Buktikan dengan menghitung dalam dua cara bahwa untuk setiap bilangan asli n dan r dengan $n \geq r \geq 1$ berlaku

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$$

dengan memerhatikan kasus berikut. Misalkan terdapat sebanyak n orang, kita diminta membentuk kelompok yang terdiri atas r orang, kemudian kita harus menentukan ketua dari kelompok-kelompok tersebut.

Petunjuk : Cara penghitungan pertama adalah kita membentuk kelompok dengan r orang lalu memilih ketuanya. Cara penghitungan kedua adalah kita memilih terlebih dahulu ketua kelompoknya, kemudian memilih $r - 1$ orang dari yang tersisa sebagai anggota kelompok.

2.130 Kembangkan cara berhitung dalam soal 2.129 di atas untuk membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\times 2^{n-1}$$

Petunjuk : Lakukan penghitungan yang serupa, namun dari n orang tersebut kita akan membentuk kelompok yang paling sedikit terdiri atas 1 orang dan paling banyak terdiri atas n orang.

2.131 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+3\binom{n}{3}^2+\ldots+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$$

Petunjuk : Hitunglah dalam dua cara, banyaknya cara membentuk suatu kelompok yang terdiri dari n orang yang dipilih dari $2n$ orang yang terdiri atas n pria dan n wanita, kemudian memilih ketua kelompok, jika ketua kelompok harus pria.

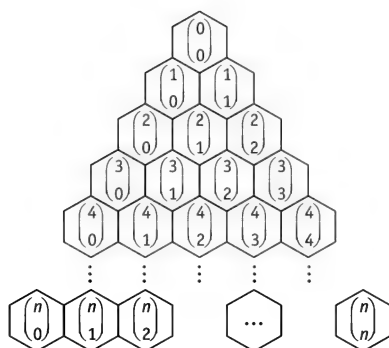
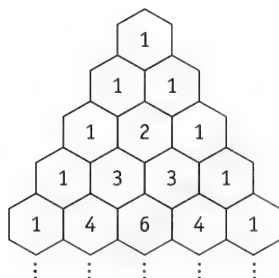
2.132 Buktikan dengan berhitung dalam dua cara, bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$$

Petunjuk : Perhatikan kembali pembuktian identitas Vandermonde.

2.8.4 Segitiga Pascal

Blaise Pascal (1623–1662) adalah seorang matematikawan asal Perancis. Selain namanya dikenal karena digunakan sebagai satuan tekanan, Pascal, dalam matematika Pascal dikenal dalam segitiga Pascal. Dalam kenyataannya, beberapa matematikawan Cina, Arab, dan Persia sudah menggunakan segitiga ini beberapa abad sebelumnya.

Segitiga Pascal adalah susunan triangular dari koefisien-koefisien binomial. Kita akan melihat nantinya bahwa susunan triangular ini sesuai dengan identitas Pascal yang telah kita bahas sebelumnya. Adapun susunan triangular ini adalah sebagai berikut.

Jika kita hitung nilai kombinasi pada beberapa baris awal, kita akan mendapatkan sebagai berikut.

Kita melihat suatu pola yang menarik. Pertama, nilai-nilai kombinasi tersebut seakan-akan simetris pada bagian tengahnya. Hal ini disebabkan oleh berlakunya identitas kesimetrian, yaitu

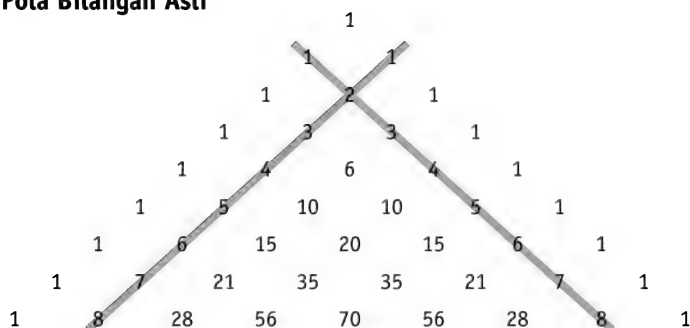
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n dan r sehingga $r \leq n$. Kedua, setiap bilangan merupakan jumlah dari dua bilangan di atasnya. Hal ini disebabkan oleh berlakunya identitas Pascal, yaitu

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

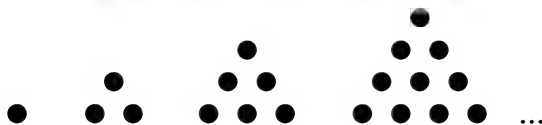
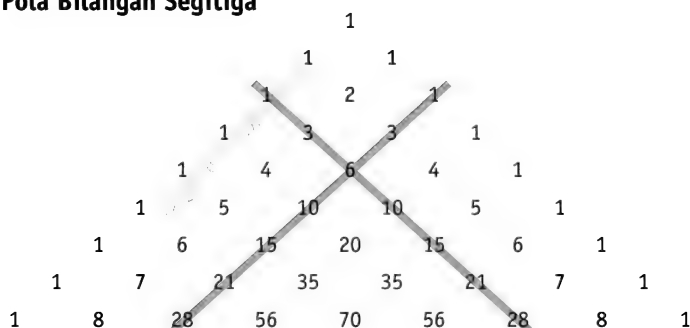
untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n dan r sehingga $1 \leq r \leq n$.

Jika kita perhatikan dengan lebih cermat, hal yang menarik dalam segitiga Pascal ini adalah kita dapat menemukan banyak pola. Beberapa pola di antaranya adalah sebagai berikut.

1. Pola Bilangan Asli

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n$$

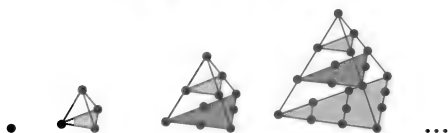
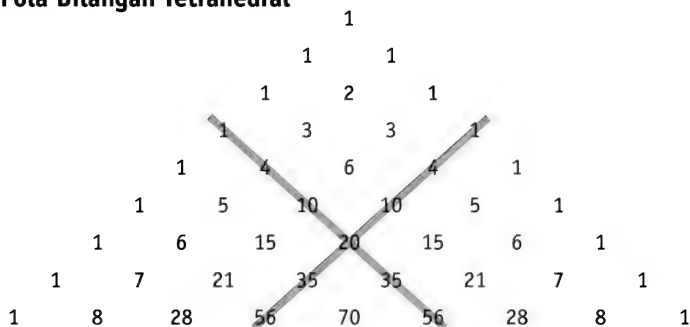
$$\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \binom{4}{1}, \ldots, \binom{n}{1}$$

$$\binom{1}{0}, \binom{2}{1}, \binom{3}{2}, \binom{4}{3}, \ldots, \binom{n}{n-1}$$

2. Pola Bilangan Segitiga

$$1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$$

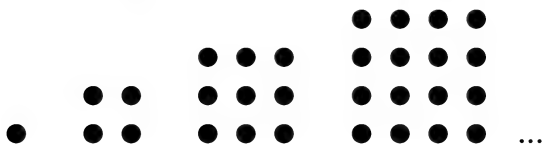
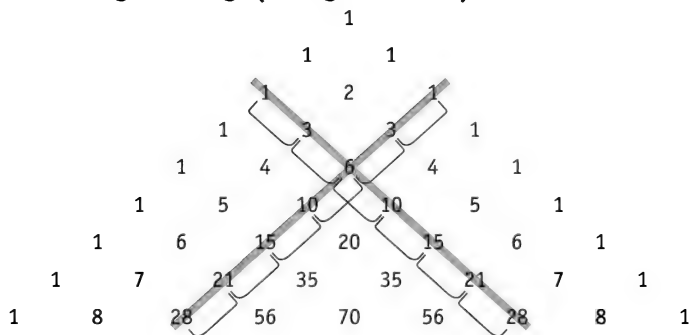
$$\binom{2}{0}, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, \binom{5}{3}, \ldots, \binom{n+1}{n-1}$$

$$\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \ldots, \binom{n+1}{2}$$

3. Pola Bilangan Tetrahedral

$$1, 4, 10, 20, \ldots, \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\binom{3}{0}, \binom{4}{1}, \binom{5}{2}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{n+2}{n-1}$$

$$\binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{n+2}{3}$$

4. Pola Bilangan Persegi (Bilangan Kuadrat)

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$$

$$\binom{2}{0},\binom{2}{0}+\binom{3}{1},\binom{3}{1}+\binom{4}{2},\binom{4}{2}+\binom{5}{3},\ldots,\binom{n}{n-2}+\binom{n+1}{n-1}$$

$$\binom{2}{2},\binom{2}{2}+\binom{3}{2},\binom{3}{2}+\binom{4}{2},\binom{4}{2}+\binom{5}{2},\ldots\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$$

Tentu saja empat pola ini hanya beberapa di antaranya. Para pembaca dapat menemukan pola-pola yang lain. Pada pembahasan tentang barisan dan deret nanti kita juga akan menemukan pola bilangan Fibonacci dalam segitiga Pascal ini. Soal-soal berikut membahas tentang segitiga Pascal dan teorema binomial.

Soal

2.133 Buktikan secara aljabar bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n dan k berlaku

$$\binom{n+1}{k}=\frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

2.134 Tentukan nilai dari

$$\binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3}+\ldots+\binom{20}{10}$$

dengan memanfaatkan identitas dan akibat dalam subbab 2.8.3.

2.135 Hitunglah

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

Petunjuk : Terlebih dahulu buktikan bahwa

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

Gunakanlah persamaan ini dan akibat 1 dalam subbab 2.8.3.

2.136 Misalkan

$$S=\binom{2009}{0}+2\binom{2009}{1}+3\binom{2009}{2}+\ldots+2010\binom{2009}{2009}$$

Tentukan banyaknya faktor positif dari S.

2.137 Kita perhatikan bahwa

$$11^0 = 1$$
$$11^1 = 11$$
$$11^2 = 121$$
$$11^3 = 1331$$

Hasil ini menunjukkan bahwa perpangkatan dari bilangan 11 menghasilkan bilangan yang memiliki digit-digit yang merupakan barisan dalam segitiga Pascal.

a. Bagaimana kita dapat menjelaskan hal ini?

b. Apakah untuk 11^4 dan selanjutnya juga berlaku? Perlihatkan dan jelaskan mengapa demikian.

2.138 Persamaan berikut disebut teorema kaus kaki natal (*christmas stocking theorem*) karena muncul di segitiga Pascal dalam bentuk yang mirip kaus kaki.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

a. Buktikan persamaan ini secara aljabar dengan cara sebagai berikut.

   Perhatikan bahwa menurut identitas Pascal berlaku

$$\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r}{r-1}$$

   Buatlah k persamaan dengan menyubstitusikan $r = 1, 2, 3, \ldots, k$, kemudian jumlahkan semua persamaan tersebut.

b. Tunjukkan keberadaan identitas ini dalam segitiga Pascal.

2.139 Misalkan k dan n adalah bilangan-bilangan bulat dengan $1 \leq k < n$. Buktikan identitas segienam

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

yang menyatakan hubungan bilangan-bilangan dalam segitiga Pascal yang membentuk segienam.

2.140 Lengkapilah tabel berikut.

Gambar	Banyaknya						
	Titik	Garis	Segitiga	Segi-empat	Segilima	Segi-enam	Segitujuh

Pola apakah yang terlihat?

2.141 Kita telah melihat bahwa pola bilangan asli, pola bilangan segitiga, pola bilangan tetrahedral, dan pola bilangan persegi dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi. Tentukan formula yang memuat kombinasi untuk suku ke-n barisan-barisan berikut.

a. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

b. 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

c. 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...

d. 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, ...

e. 1, 3, 15, 84, 495, 3003, 18564, 116280, 735471, 4686825, ...

Petunjuk : Terlebih dahulu temukan barisan-barisan ini di segitiga Pascal.

2.8.5 Teorema Multinomial

Kita perhatikan kembali teorema binomial

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n$$

untuk x dan y adalah variabel, dan n adalah bilangan bulat positif.

Tentu saja teorema ini hanya berlaku untuk dua variabel, yaitu x dan y. Pada bagian ini kita akan melihat perluasan dari teorema binomial, yaitu teorema multinomial. Teorema ini dapat kita gunakan untuk menjabarkan bentuk

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$$

Kita tidak akan menuliskan teorema multinomial ini dalam bentuk penjabarannya secara utuh, tetapi kita akan melihat lebih pada koefisien dari setiap sukunya. Kita perhatikan bahwa setiap suku dari penjabaran ini mempunyai bentuk

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

dan tentu saja

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Untuk menentukan koefisien dari suku ini, kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\ldots(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}_{n}\end{aligned}$$

Mula-mula kita mengambil sebanyak n_1 variabel x_1 dari n yang tersedia, kemudian kita mengambil sebanyak n_2 variabel x_2 dari $n - n_1$ yang tersisa, kemudian kita mengambil sebanyak n_3 variabel x_3 dari

$n - n_1 - n_2$ yang tersisa, demikian seterusnya sampai dengan kita mengambil sebanyak n_k variabel x_k dari $n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}$ yang tersisa. Sehingga berdasarkan aturan perkalian kita memperoleh

$$C(n,n_1) \times C(n-n_1,n_2) \times \dots \times C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1},n_k)$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \dots \times \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Jadi, koefisien suku tersebut adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Koefisien suku $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ pada hasil penjabaran bentuk $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ dengan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Contoh 2.8.5.1

Tentukan koefisien suku $x^3y^2z^5$ pada hasil penjabaran $(x + 2y - z)^{10}$.

Jawab

Kita tuliskan

$$(x + 2y - z)^{10} = [(x) + (2y) + (-z)]^{10}$$

Pada hasil penjabaran tersebut, suku yang memuat $(x)^{n_1}(2y)^{n_2}(-z)^{n_3}$ dengan

$$n_1 + n_2 + n_3 = 10$$

adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}(x)^{n_1}(2y)^{n_2}(-z)^{n_3}$$

Maka kita memperoleh

$$\frac{10!}{3!2!5!}(x)^3(2y)^2(-z)^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 5!}(-4x^3y^2z^5)$$
$$= 2520(-4x^3y^2z^5)$$
$$= -10080x^3y^2z^5$$

Jadi, koefisien suku $x^3y^2z^5$ adalah -10080.

Soal

2.142 Tentukan koefisien suku $x^2y^3z^4$ dari hasil penjabaran bentuk $(3x - y + z)^9$.

Contoh 2.8.5.2

Tentukan koefisien suku x^{10} pada hasil penjabaran $(1 - x + x^2)^7$.

Jawab

Kita tuliskan

$$(1 - x + x^2)^7 = \left[(1) + (-x) + (x^2)\right]^7$$

Pada hasil penjabaran tersebut, suku yang memuat $(1)^{n_1}(-x)^{n_2}(x^2)^{n_3}$ dengan

$$n_1 + n_2 + n_3 = 7 \qquad (1)$$

adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}(1)^{n_1}(-x)^{n_2}(x^2)^{n_3}$$

Kita menginginkan suku yang memuat x^{10}, oleh karena itu haruslah

$$n_2 + 2n_3 = 10 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) kita memperoleh sistem persamaan yang solusinya adalah

$$n_1 = t,\ n_2 = 4 - 2t,\ n_3 = t + 3$$

dengan t adalah bilangan bulat. Nilai-nilai yang memenuhi hanyalah ketika n_1, n_2, dan n_3 ketiganya merupakan bilangan bulat non negatif, yaitu

$$t = 0 \to n_1 = 0,\ n_2 = 4,\ n_3 = 3$$
$$t = 1 \to n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 4$$
$$t = 2 \to n_1 = 2,\ n_2 = 0,\ n_3 = 5$$

Maka suku yang dimaksud adalah

$$\frac{7!}{0!4!3!}(1)^0(-x)^4\left(x^2\right)^3 + \frac{7!}{1!2!4!}(1)^1(-x)^2\left(x^2\right)^4 + \frac{7!}{2!0!5!}(1)^2(-x)^0\left(x^2\right)^5$$

$$= 35x^{10} + 105x^{10} + 21x^{10}$$

$$= 161x^{10}$$

Jadi, koefisien suku x^{10} adalah 161.

Soal

2.143 Tentukan koefisien suku x dari hasil penjabaran bentuk $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)^8$.

Contoh 2.8.5.3

Berapa banyak suku yang ada pada hasil penjabaran $(a + b + c + d + e)^{15}$?

Jawab

Banyaknya suku yang ada pada hasil penjabaran

$$(a + b + c + d + e)^{15}$$

sama dengan banyaknya solusi bulat nonnegatif dari persamaan

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 15$$

yaitu

$$C(5 + 15 - 1, 15) = \frac{19!}{4!15!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 15!} = 3876$$

Jadi, ada sebanyak 3876 suku yang ada pada hasil penjabaran tersebut.

Soal

2.144 Berapa banyak suku yang ada pada hasil penjabaran $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$?

BAB III
METODE-METODE PEMBUKTIAN DAN STRATEGI PEMECAHAN MASALAH

Prasyarat lain yang penting dalam pemecahan masalah matematika adalah metode pembuktian. Pada hakikatnya, metode pembuktian adalah salah satu bagian dari logika matematika. Oleh sebab itu, sebelum membahas metode pembuktian, ada baiknya kita melihat kembali beberapa hal yang berkaitan dengan kalimat matematika.

Kita mengenal dua jenis kalimat, yaitu kalimat terbuka dan kalimat tertutup atau pernyataan. Kalimat terbuka, misalnya "$2x + 1 = 5$" adalah kalimat yang belum diketahui kebenarannya, sedangkan kalimat tertutup, misalnya "matahari terbit dari timur" adalah kalimat yang sudah diketahui kebenarannya. Kalimat semacam ini disebut pula pernyataan atau proposisi. Mengingat tidak semua pernyataan dalam matematika dapat atau perlu dibuktikan, berikut akan diberikan beberapa jenis pernyataan dalam matematika.

1. ***Definisi*** adalah pernyataan yang memberikan arti dari suatu istilah baru secara jelas. Sebagai contoh, suatu bilangan asli disebut *bilangan prima* jika bilangan tersebut mempunyai tepat dua pembagi positif. Ini adalah definisi bilangan prima. Khusus dalam definisi, kata "jika" selalu berarti "jika dan hanya jika". Artinya, jika suatu bilangan asli mempunyai tepat dua pembagi positif, maka bilangan tersebut merupakan bilangan prima, dan sebaliknya jika suatu bilangan asli

merupakan bilangan prima, maka bilangan tersebut mempunyai tepat dua pembagi positif.

2. ***Aksioma*** atau ***postulat*** adalah pernyataan yang menjadi titik awal (dasar pemikiran) suatu penalaran. Umumnya, aksioma berupa sesuatu yang dianggap benar karena sudah sangat jelas dan tidak perlu dibuktikan, sehingga kebenarannya tidak perlu diragukan lagi. Sebagai contoh, Euclid mengatakan "Melalui dua titik hanya dapat dibuat satu garis".
3. ***Teorema*** adalah pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya. Biasanya teorema merupakan suatu sarana untuk menjawab permasalahan, misalnya teorema Pythagoras yang seringkali kita jadikan sarana untuk menyelesaikan persoalan-persoalan dalam geometri.
4. ***Lemma*** adalah teorema kecil. Biasanya lemma muncul sebagai jembatan untuk membuktikan teorema yang lebih umum. Artinya, untuk membuktikan teorema tersebut, kita dapat menggunakan lemma yang sudah terlebih dahulu kita buktikan. Salah satu contohnya adalah lemma Euclid, yaitu

   "Untuk setiap bilangan prima p, jika p habis membagi ab, maka p habis membagi a dan/atau p habis membagi b."

   Lemma ini menjadi jembatan bagi teorema berikut.

   "Jika n habis membagi ab dan n dan a tidak mempunyai faktor persekutuan, maka n habis membagi a."
5. ***Akibat*** atau *corollary* adalah pernyataan yang muncul sebagai konsekuensi dari sebuah teorema. Sebagai contoh, kita telah mengenal bentuk kombinasi, yaitu

   $$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

   Salah satu akibat yang dapat muncul adalah

   $$C(n,r) = C(n,n-r)$$

   yang mudah dibuktikan dengan teorema di atas.
6. ***Dugaan*** atau ***konjektur*** atau ***klaim*** adalah pernyataan yang dianggap benar, biasanya berdasarkan data pendukung. Tentu saja, dugaan ini selanjutnya perlu dibuktikan untuk menjamin kebenarannya. Dugaan yang telah dibuktikan dapat berubah menjadi teorema.

Dari beberapa jenis pernyataan di atas, kita dapat melihat bahwa pernyataan-pernyataan yang *tidak perlu dibuktikan* adalah definisi dan aksioma. Pernyataan-pernyataan yang *harus dapat dibuktikan* adalah teorema, lemma, dan akibat. Sedangkan pernyataan yang *perlu dibuktikan* adalah dugaan atau konjektur atau klaim.

Selaras dengan itu, ketika kita berhadapan dengan situasi di mana kita perlu membuktikan suatu pernyataan matematis, ada banyak strategi yang dapat kita lakukan. Berikut akan dibahas beberapa strategi atau metode pembuktian tersebut. Pembahasan ini akan dipilah menjadi dua bagian, yaitu metode pembuktian dasar dan metode pembuktian lanjut.

3.1 Metode Pembuktian Dasar

Pernyataan-pernyataan matematis tersebut umumnya dapat ditulis dalam bentuk implikasi, yakni $p \to q$, dengan p dan q masing-masing merupakan pernyataan. Pada bagian ini dan selanjutnya akan dibahas beberapa teknik pembuktian untuk membuktikan pernyataan tersebut.

Secara garis besar terdapat dua metode pembuktian yang sederhana, yaitu *pembuktian langsung* dan *pembuktian tidak langsung*. Ada dua macam pembuktian tidak langsung yakni *pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi* dan *pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi*.

3.1.1 Pembuktian Langsung

Pembuktian langsung adalah pembuktian suatu kalimat atau sifat matematika tanpa mengubah susunan kalimat tersebut. Dengan kata lain, untuk membuktikan kebenaran pernyataan implikasi $p \to q$, kita berangkat dengan memisalkan p benar dan melalui langkah-langkah logika harus ditunjukkan bahwa q benar. Perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 3.1.1.1

Buktikan bahwa jika n bilangan bulat ganjil maka n^2 bilangan bulat ganjil.

Jawab

Kita akan membuktikan pernyataan implikasi $p \to q$, dengan:

p : n bilangan bulat ganjil.

q : n^2 bilangan bulat ganjil.

Mula-mula kita misalkan p benar, yaitu n merupakan bilangan bulat ganjil, akan dibuktikan bahwa n^2 bilangan bulat ganjil.

Karena n bilangan bulat ganjil, kita dapat menuliskan $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k.

Selanjutnya kita perhatikan
$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Kini kita pilih $l = 2k^2 + 2k$. Artinya ada l yang merupakan bilangan bulat sehingga $n^2 = 2l + 1$.

Jadi, n^2 merupakan bilangan bulat ganjil.

Jadi, pernyataan tersebut terbukti.

Untuk selanjutnya, informasi mengenai pernyataan p dan q tidak lagi perlu dituliskan. Ini dilakukan untuk alasan efisiensi penulisan bukti. Setiap kali akan membuktikan suatu pernyataan implikasi, para pembaca harap menyadari dengan cepat, mana yang menjadi p dan mana yang menjadi q. Kemudian pada pembuktian langsung, alur yang terlihat adalah mulai dari p, kemudian disambung dengan langkah-langkah logika yang pada akhirnya sampai ke q sebagai kesimpulannya.

Contoh 3.1.1.2

Buktikanlah bahwa jika a bilangan ganjil dan b bilangan genap maka $3a^2 - b + 1$ adalah bilangan genap.

Jawab

Misalkan a bilangan ganjil dan b bilangan genap. Dengan demikian, $a = 2k + 1$ dan $b = 2l$, untuk suatu bilangan bulat k dan l. Perhatikan
$$\begin{aligned} 3a^2 - b + 1 &= 3(2k + 1)^2 - (2l) + 1 \\ &= 3(4k^2 + 4k + 1) - 2l + 1 \end{aligned}$$

$$= 12k^2 + 12k - 2l + 4$$
$$= 2(6k^2 + 6k - l + 2)$$

Pilih $m = 6k^2 + 6k - l + 2$. Artinya ada bilangan bulat m sehingga $3a^2 - b + 1 = 2m$. Jadi, $3a^2 - b + 1$ merupakan bilangan genap.

Contoh 3.1.1.3

Buktikan bahwa hasil penjumlahan dua buah bilangan rasional adalah bilangan rasional.

Jawab

Misalkan x dan y dua buah bilangan rasional sembarang, akan dibuktikan bahwa $x + y$ bilangan rasional. Karena x dan y bilangan rasional, maka

$$x = \frac{a}{b} \text{ dan } y = \frac{c}{d}$$

untuk suatu bilangan bulat a, b, c, d dengan $b, d \neq 0$. Perhatikan

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$
$$= \frac{ad + bc}{bd}$$

Pilih $e = ad + bc$ yang merupakan bilangan bulat dan $f = bd$ yang juga merupakan bilangan bulat dengan $f \neq 0$ sebab $b, d \neq 0$. Artinya, ada bilangan-bilangan bulat e dan f dengan $f \neq 0$ sehingga

$$x + y = \frac{e}{f}$$

Jadi, $x + y$ merupakan bilangan rasional.

Soal

3.1 Buktikan bahwa jika p dan q adalah bilangan ganjil, maka $p^3 - 5q^2 - pq + 7$ adalah bilangan genap.

3.2 Buktikan bahwa jika m bilangan ganjil dan n bilangan genap, maka $m^2 - n^3 + mn - 2m - 4$ adalah bilangan ganjil.

3.3 Buktikan bahwa jika $m + n$ dan $n + p$ adalah bilangan-bilangan genap, dengan m, n, dan p adalah bilangan-bilangan bulat, maka $m + p$ adalah bilangan genap.

3.4 Misalkan n sebuah bilangan asli dua digit dan m adalah bilangan yang diperoleh dengan mempertukarkan kedua digit n. Buktikan bahwa $n - m$ selalu habis dibagi 9.

3.5 Misalkan x bilangan real. Buktikan bahwa jika $|x-1| < 1$, maka $|x^2 - 4x + 3| < 3$.

3.6 Buktikan bahwa jika kedua akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ adalah bilangan bulat genap, maka a dan b merupakan bilangan bulat genap.

3.7 Identitas aljabar

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2\end{aligned}$$

muncul dalam buku *Liber Quadratorum* yang ditulis oleh Fibonacci. Buktikanlah identitas ini, kemudian gunakanlah untuk menyatakan bilangan $481 = 13 \times 37$ sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan kuadrat dalam dua cara berbeda.

Contoh 3.1.1.4

Jika n adalah bilangan bulat positif dan $2n + 1$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikanlah bahwa $n + 1$ merupakan hasil penjumlahan dari dua buah bilangan kuadrat sempurna.

Jawab

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan $2n + 1$ adalah kuadrat sempurna, akan dibuktikan bahwa $n + 1$ merupakan hasil penjumlahan dari dua buah bilangan kuadrat sempurna. Karena $2n + 1$ adalah bilangan kuadrat sempurna, maka $2n + 1 = k^2$, untuk suatu bilangan bulat k. Karena k^2 adalah bilangan ganjil, maka k juga merupakan bilangan ganjil, sehingga $k = 2p + 1$, untuk suatu bilangan bulat p. Dengan demikian,

$$2n + 1 = (2p + 1)^2$$
$$= 4p + 4p + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad n = 2p^2 + 2p$$

Selanjutnya, perhatikan

$$n + 1 = 2p^2 + 2p + 1$$
$$= p^2 + (p^2 + 2p + 1)$$
$$= p^2 + (p + 1)^2$$

Jadi, $n + 1$ merupakan hasil penjumlahan dari dua buah bilangan kuadrat sempurna.

Soal

3.8 Tunjukkan bahwa $(a^2 + a + 1)^2$ dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari tiga bilangan kuadrat sempurna.

Petunjuk : Perhatikan $(a^2 + a + 1)^2 = [(a^2 + a) + 1]^2 = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1$, jadi tinggal menuliskan $2(a^2 + a) + 1$ sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan kuadrat sempurna.

3.9 Jika n adalah bilangan bulat positif dan $3n + 1$ adalah bilangan kuadrat sempurna, tunjukkanlah bahwa $n + 1$ merupakan hasil penjumlahan dari tiga buah bilangan kuadrat sempurna.

Petunjuk : Misalkan $3n + 1 = k^2$, artinya k^2 bersisa 1 jika dibagi 3. Ini hanya mungkin jika k bersisa 1 atau 2 jika dibagi 3.

3.10 Bilangan triangular adalah bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{1}{2}k(k+1)$ untuk suatu bilangan asli k. Buktikan bahwa jika n adalah hasil penjumlahan dari dua bilangan triangular, maka $4n + 1$ merupakan hasil penjumlahan dari dua bilangan kuadrat sempurna.

Petunjuk : Misalkan $n = \frac{1}{2}k_1(k_1 + 1) + \frac{1}{2}k_2(k_2 + 1)$. Salah satu dari bilangan kuadrat sempurna itu adalah $(k_1 + k_2 + 1)^2$.

3.11 Soal berikut adalah pembuktian formula kuadrat atau rumus abc, yaitu rumus yang kita gunakan untuk menentukan akar-akar dari suatu persamaan kuadrat.

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. Buktikan rumus tersebut dengan metode melengkapkan kuadrat sempurna.

b. Ada cara lain untuk membuktikan rumus ini. Tuliskan

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

sehingga x_1 dan x_2 adalah akar-akarnya. Tunjukkan bahwa

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + [-a(x_1 + x_2)]x + ax_1x_2$$

Dengan menyamakan koefisien suku-suku pada kedua ruas diperoleh

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dan } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Dari hasil ini, tunjukkan bahwa

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

Dengan mengasumsikan bahwa $b^2 - 4ac \geq 0$, tarik akar kedua ruas, maka kita memperoleh dua kasus untuk nilai $x_1 - x_2$. Untuk masing-masing kasus ini, selesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \end{cases}$$

untuk memperoleh nilai x_1 dan x_2.

c. Perlihatkan bahwa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

adalah solusi dari persamaan kuadrat tersebut.

3.12 Dimiliki

$$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

a. Hitunglah nilai A.

b. Buktikanlah bahwa A dapat dituliskan sebagai jumlah dari kuadrat beberapa bilangan prima pertama.

3.1.2 Pembuktian Tidak Langsung dengan Kontraposisi

Ada kalanya dalam membuktikan suatu pernyataan matematis, pembuktian langsung terasa sulit. Jika hal ini terjadi, kita dapat menggunakan cara yang lain, yaitu bukti tidak langsung.

Pembuktian tidak langsung adalah pembuktian suatu kalimat/ sifat matematika dengan mengubah susunan kalimat tersebut. Pada bagian ini dibahas pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi. Kita mengetahui bahwa setiap pernyataan implikasi ekuivalen dengan kontraposisinya.

$$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$$

Konsep inilah yang menjadi dasar pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi. Di sini, kita berangkat dengan memisalkan $\overline{q}$ benar dan harus ditunjukkan bahwa $\overline{p}$ benar. Jika pernyataan kontraposisinya telah terbukti benar, maka pernyataan semula pastilah benar pula.

Perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 3.1.2.1

Buktikan bahwa jika $3n + 2$ bilangan bulat ganjil maka n bilangan bulat ganjil.

Jawab

Sepintas, pembuktian ini tampak sulit dikerjakan dengan pembuktian langsung, maka kita ubah pernyataan ini menjadi kontraposisinya, yaitu "Jika n bilangan bulat genap maka $3n + 2$ bilangan bulat genap."
Untuk membuktikan pernyataan ini, misalkan n merupakan bilangan bulat genap. Artinya, $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Perhatikan

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2k) + 2 \\ &= 2(3k + 1) \end{aligned}$$

Pilih $l = 3k + 1$. Artinya ada bilangan bulat l sehingga $3n + 2 = 2l$.
Jadi, $3n + 2$ merupakan bilangan bulat genap.
Jadi, terbukti bahwa kontraposisi dari pernyataan ini benar, sehingga pernyataan semula juga benar.

Contoh 3.1.2.2

Buktikanlah bahwa jika n^3 bilangan irasional, maka n bilangan irasional.

Jawab

Akan dibuktikan kontraposisinya, yaitu "Jika n bilangan rasional maka n^3 bilangan rasional."

Misalkan n bilangan rasional, maka $n = \frac{p}{q}$, dengan p dan q bilangan-bulat bulat serta $q \neq 0$. Perhatikan

$$n^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

$$= \frac{p^3}{q^3}$$

Pilih $s = p^3$ yang merupakan bilangan bulat dan $t = q^3$ yang tidak sama dengan nol sebab $q \neq 0$. Artinya, ada bilangan-bilangan bulat s dan t dengan $t \neq 0$ sehingga $n^3 = \frac{s}{t}$. Jadi, n^3 merupakan bilangan rasional.

Jadi, terbukti bahwa kontraposisi dari pernyataan ini benar, sehingga pernyataan semula juga benar.

Soal

3.13 Buktikan bahwa jika $5n^2 + 2n - 3$ adalah bilangan ganjil maka n adalah bilangan genap.

3.14 Buktikan bahwa jika x bilangan irasional, maka $\frac{1}{x}$ bilangan irasional.

3.15 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dan y, jika $x + y \geq 2$ maka $x \geq 1$ atau $y \geq 1$.

3.16 Misalkan m, n, dan p bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $m + p$ bilangan ganjil maka $m + n$ atau $n + p$ merupakan bilangan genap.

3.17 Buktikan bahwa jika hasil kali dua bilangan real positif lebih dari 100, maka minimal salah satu dari kedua bilangan tersebut lebih dari 10.

3.18 Buktikan bahwa jika hasil kali dua bilangan adalah bilangan genap, maka salah satu dari kedua bilangan tersebut pasti merupakan bilangan genap.

3.19 Buktikan bahwa jika hasil kali dua bilangan adalah bilangan ganjil, maka kedua bilangan tersebut pasti merupakan bilangan ganjil.

3.20 Untuk setiap bilangan bulat a, b, dan c, buktikan bahwa jika a tidak habis membagi $(b + c)$, maka a tidak habis membagi b atau a tidak habis membagi c.

3.21 Diberikan u dan v adalah bilangan-bilangan bulat, buktikan bahwa u dan v keduanya merupakan bilangan ganjil jika $u^2 + v^2$ habis dibagi 4.

3.1.3 Pembuktian Tidak Langsung dengan Kontradiksi

Suatu pernyataan pasti memiliki nilai kebenaran yang berlawanan dengan nilai kebenaran ingkarannya. Pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi dimulai dengan membuktikan bahwa *ingkaran* (negasi) dari pernyataan implikasi tersebut salah. Dengan terbuktinya bahwa ingkaran tersebut salah, maka pernyataan implikasi tersebut pasti benar.

Kesalahan yang diperoleh tersebut ditunjukkan oleh suatu *kontradiksi*. Suatu kontradiksi terjadi bilamana ada dua atau lebih pernyataan yang saling bertentangan.

$$\overline{p \rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$$

Dalam proses ini, kita berangkat dengan mengandaikan $p \wedge \overline{q}$. Dari sini kita harus menemukan $r \wedge \overline{r}$, yaitu pernyataan yang selalu salah (kontradiksi). Maka $p \wedge \overline{q}$ salah. Artinya $\overline{p \rightarrow q}$ salah, dan sebaliknya $p \rightarrow q$ pasti benar.

Pembuktian ini tidak hanya dapat digunakan untuk pernyataan implikasi, tetapi pernyataan tunggal pun dapat dibuktikan dengan teknik ini.

Perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 3.1.3.1

Buktikan bahwa jika $5n + 4$ bilangan bulat ganjil maka n bilangan bulat ganjil.

Jawab

Andaikan ingkarannya benar, yaitu "$5n + 4$ bilangan bulat ganjil dan n bilangan bulat genap."

Karena n bilangan bulat genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya, $5n + 4 = 5(2k) + 4 = 2(5k + 2)$. Pilih $l = 5k + 2$ yang merupakan bilangan bulat, sehingga $5n + 4 = 2l$. Ini berarti $5n + 4$ adalah bilangan genap. Kontradiksi dengan pengandaian bahwa $5n + 4$ bilangan bulat ganjil.

Jadi, pengandaian salah. Dengan demikian, pernyataan semula benar. Jadi, terbukti bahwa jika $5n + 4$ bilangan bulat ganjil maka n bilangan bulat ganjil.

Contoh 3.1.3.2

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Jawab

Andaikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional, maka $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak memiliki faktor persekutuan serta $q \neq 0$.

Selanjutnya,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2q^2 = p^2$$

Dari persamaan ini, ruas kiri merupakan bilangan genap, maka haruslah ruas kanan juga merupakan bilangan genap. Artinya, p^2 adalah bilangan genap, yang berarti p adalah bilangan genap. Misalkan $p = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k, substitusikan:

$$\Leftrightarrow \quad 2q^2 = (2k)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Sekarang ruas kanan genap, maka ruas kiri juga genap. Artinya q^2 adalah bilangan genap, yang berarti q adalah bilangan genap.

Dengan demikian, p dan q keduanya merupakan bilangan genap. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa p dan q adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak memiliki faktor persekutuan, sebab dua bilangan genap pastilah memiliki faktor persekutuan.
Jadi, pengandaian salah. Dengan demikian, pernyataan semula benar. Jadi, terbukti bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Contoh 3.1.3.3

Bilangan Euler yang dilambangkan dengan e, adalah bilangan yang dapat diekspresikan sebagai jumlah tak hingga berikut.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Buktikan bahwa bilangan ini adalah bilangan irasional.

Jawab

Andaikan sebaliknya, yaitu e adalah bilangan rasional, maka

$$e = \frac{p}{q}$$

untuk suatu bilangan bulat positif p dan q (karena menurut definisi jelas terlihat bahwa e merupakan bilangan positif). Oleh karena itu,

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Kalikan kedua ruas dengan $q!$, diperoleh

$$q!\left(\frac{p}{q}\right) = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \frac{q!}{4!} + \ldots$$

Dan karena $q! = q(q - 1)!$ maka bentuk ini bisa dituliskan sebagai

$$(q-1)!\,p = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \frac{q!}{4!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \ldots$$

Perhatikan bahwa ruas kiri, yaitu $(q - 1)!p$ merupakan bilangan bulat. Akibatnya, ruas kanan juga haruslah merupakan bilangan bulat.

Jelas bahwa

$$q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \frac{q!}{4!} + \ldots + \frac{q!}{q!}$$

merupakan bilangan bulat, sebab setiap sukunya merupakan bilangan bulat. Akibatnya, suku-suku yang lain yaitu

$$\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \ldots$$

juga harus merupakan bilangan bulat. Misalkan bilangan bulat ini sebagai

$$R = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \ldots \qquad (1)$$

yang dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R &= \frac{q!}{(q+1)q!} + \frac{q!}{(q+2)(q+1)q!} + \frac{q!}{(q+3)(q+2)(q+1)q!} + \ldots \\ &= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \ldots \end{aligned}$$

Sekarang, perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \ldots < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

sebab selain suku pertama, setiap suku di ruas kiri bernilai lebih kecil dari setiap suku di ruas kanan. Ini berarti

$$R < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots \qquad (2)$$

Untuk menghitung jumlahnya, misalkan jumlah yang baru ini sebagai

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

Sehingga bisa dituliskan

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)} \underbrace{\left[\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots \right]}_{S}$$

Maka

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)} S$$

Dari sini diperoleh

$$S = \frac{1}{q}$$

Oleh karena itu,

$$R < \frac{1}{q}$$

Karena q merupakan bilangan bulat positif, maka $\frac{1}{q} < 1$. Karena $R < \frac{1}{q}$ dan $\frac{1}{q} < 1$, maka $R < 1$. Dari (1), terlihat pula bahwa $R > 0$. Jadi, $0 < R < 1$. Padahal, R merupakan bilangan bulat. Kontradiksi, sebab tidak ada bilangan bulat R yang memenuhi $0 < R < 1$.
Jadi, pengandaian salah. Terbukti bahwa e adalah bilangan irasional.

Contoh 3.1.3.4
Buktikan bahwa jika a, b, c bilangan-bilangan ganjil, maka persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tidak memiliki akar bilangan rasional.

Jawab
Andaikan a, b, c bilangan-bilangan ganjil dan persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

memiliki akar bilangan rasional.
Artinya, persamaan kuadrat ini dapat difaktorkan, misalkan menjadi

$$(Ax + B)(Cx + D) = 0$$

dengan A, B, C, D merupakan bilangan-bilangan bulat.
Dari sini diperoleh

$$ACx^2 + (AD + BC)x + BD = 0$$

Dengan memerhatikan koefisien dari setiap suku, diperoleh $a = AC$, $b = AD + BC$, dan $c = BD$.

Perhatikan a dan c yang sesuai pengandaian merupakan bilangan ganjil, maka A, C, B, D juga merupakan bilangan ganjil, sebab bilangan ganjil pasti merupakan hasil perkalian dari bilangan-bilangan ganjil. Akibatnya, $AD + BC$ merupakan bilangan genap, yang berarti b merupakan bilangan genap. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa b merupakan bilangan ganjil.
Jadi, pengandaian salah. Terbukti bahwa jika a, b, c bilangan-bilangan ganjil, maka persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki akar bilangan rasional.

Kadangkala penggunaan metode pembuktian dengan kontradiksi membingungkan pembaca dalam hal penulisan. Misalkan, dalam contoh 3.1.3.4 di atas, kita diminta untuk membuktikan bahwa "Jika a, b, c bilangan-bilangan ganjil, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak memiliki akar bilangan rasional.", namun dalam pembuktiannya kita justru mengandaikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar bilangan rasional. Hal ini dapat membingungkan. Untuk mengatasinya, dalam pengandaian tersebut kita dapat menambahkan catatan "*untuk keperluan kontradiksi*". Dalam bahasa Inggris, arti istilah ini sama dengan "*by way of contradiction*" yang biasa disingkat *b.w.o.c.*. Jadi, untuk merapikan pembuktian pada contoh 3.1.3.4 di atas kita dapat mulai dengan menuliskan sebagai berikut.

Untuk keperluan kontradiksi, kita andaikan a, b, c bilangan-bilangan ganjil dan persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

memiliki akar bilangan rasional.

Berikut adalah satu contoh pembuktian lain. Pembuktian ini digunakan oleh Euler untuk menunjukkan bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan prima.

Contoh 3.1.3.5

Buktikan bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan prima.

Jawab

Untuk keperluan kontradiksi, andaikan bilangan prima ada sebanyak berhingga, misalkan sebanyak r, yaitu

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$$

adalah bilangan-bilangan prima. Perhatikan bilangan

$$N = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r + 1$$

yaitu hasil perkalian dari semua bilangan prima ditambah satu.

a. Jika N merupakan bilangan prima, maka sekarang ada sebanyak $r + 1$ bilangan prima.

b. Jika N bukan bilangan prima, maka N pasti mempunyai minimal satu faktor prima. Padahal, tentu tidak ada satupun dari p_1, p_2, p_3, ..., p_r yang habis membagi N, sebab jika ada salah satunya, misalkan p_k, yang habis membagi N, maka p_k akan habis membagi $N - p_1 p_2 p_3 \ldots p_r = 1$. Ini tidak mungkin. Artinya, haruslah terdapat bilangan prima lain, misalkan p, yang habis membagi N. Jadi sekarang ada sebanyak $r + 1$ bilangan prima.

Kenyataan bahwa terdapat sebanyak $r + 1$ bilangan prima berkontradiksi dengan pernyataan yang menyatakan bahwa hanya ada r bilangan prima. Jadi, pengandaian salah.

Terbukti bahwa ada tak hingga banyaknya bilangan prima.

Soal

3.22 Buktikan bahwa $\sqrt[3]{3}$ adalah bilangan irasional.

3.23 Buktikan bahwa solusi persamaan $2^x = 3$ adalah bilangan irasional.

3.24 Buktikan bahwa jumlah dari bilangan irasional dan bilangan rasional adalah bilangan irasional.

3.25 Buktikan bahwa $1+\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.
Petunjuk : Lihat soal sebelumnya dan contoh 3.1.3.2.

3.26 Buktikan bahwa

$$x = \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{1!2!3!} + \frac{1}{1!2!3!4!} + \ldots$$

merupakan bilangan irasional.

3.27 Buktikan bahwa

$$\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$$

bukan merupakan barisan aritmatika untuk setiap bilangan asli n.

3.28 Buktikan bahwa tidak ada tiga bilangan asli berurutan sedemikian hingga pangkat tiga bilangan terbesar sama dengan jumlah pangkat tiga dua bilangan lainnya.

3.29 Misalkan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki solusi bilangan real. Buktikan bahwa jika $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ maka kedua solusi tersebut pasti negatif.

3.30 Buktikan bahwa jika a dan b bilangan bulat, maka $a^2 - 4b \neq 2$.

Petunjuk : Andaikan a dan b bilangan bulat dan $a^2 - 4b = 2$, maka $a^2 = 2(2b + 1)$, artinya a^2 adalah bilangan genap. Lanjutkan.

Kita telah banyak membahas pembuktian pernyataan-pernyataan implikasi. Kini kita akan melihat bagaimana kita membuktikan pernyataan biimplikasi, yaitu implikasi dua arah. Kita mengetahui bahwa pada hakikatnya arti dari biimplikasi $p \leftrightarrow q$ adalah

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Berdasarkan arti ini, untuk membuktikan pernyataan yang memuat biimplikasi $p \leftrightarrow q$, harus dibuktikan dua arah, yaitu bahwa $p \to q$ dan $q \to p$. Jika $p \to q$ benar dan $q \to p$ benar, maka $p \leftrightarrow q$ benar.

Contoh 3.1.3.7

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku n genap jika dan hanya jika $7n + 4$ genap.

Jawab

(1) Pertama, akan dibuktikan bahwa jika n adalah bilangan genap, maka $7n + 4$ adalah bilangan genap.

Misalkan n bilangan genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Perhatikan

$$\begin{aligned} 7n + 4 &= 7(2k) + 4 \\ &= 2(7k + 2) \end{aligned}$$

Pilih $l = 7k + 2$ yang merupakan bilangan bulat. Artinya, ada bilangan bulat l sehingga $7n + 4 = 2l$. Jadi, $7n + 4$ adalah bilangan genap.

(2) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $7n + 4$ adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap. Untuk membuktikan ini, digunakan bukti tidak langsung dengan kontraposisi. Akan dibuktikan kontraposisi pernyataan ini, yaitu "Jika n adalah bilangan ganjil, maka $7n + 4$ adalah bilangan ganjil."

Misalkan n bilangan ganjil, maka $n = 2m + 1$, untuk suatu bilangan bulat m. Perhatikan

$$\begin{aligned} 7n + 4 &= 7(2m + 1) + 4 \\ &= 14m + 11 \\ &= 2(7m + 5) + 1 \end{aligned}$$

Pilih $r = 7m + 5$ yang merupakan bilangan bulat. Artinya, ada bilangan bulat r sehingga $7n + 4 = 2r + 1$. Jadi, $7n + 4$ adalah bilangan ganjil.

Jadi, terbukti bahwa untuk n bilangan bulat positif, n genap jika dan hanya jika $7n + 4$ genap.

Selanjutnya, untuk membuktikan tiga pernyataan ekuivalen, misalkan akan dibuktikan bahwa $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$, cukup dibuktikan bahwa $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, dan $p_3 \rightarrow p_1$ benar. Karena jika ketiganya telah terbukti benar, maka $p_3 \rightarrow p_2$ dapat ditarik sebagai kesimpulan dari $p_3 \rightarrow p_1$ dan $p_1 \rightarrow p_2$, demikian pula $p_2 \rightarrow p_1$ dapat ditarik sebagai kesimpulan dari $p_2 \rightarrow p_3$ dan $p_3 \rightarrow p_1$. Demikian pula implikasi-implikasi lainnya yang terkandung di dalamnya.

Contoh 3.1.3.8

Buktikan bahwa kalimat-kalimat berikut ini ekuivalen.

p_1 : n bilangan genap.

p_2 : $n - 1$ bilangan ganjil.

p_3 : n^2 bilangan genap.

Jawab

(1) Untuk membuktikan $p_1 \rightarrow p_2$, misalkan n bilangan genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} n - 1 &= 2k - 1 \\ &= 2(k - 1) + 1 \end{aligned}$$

Pilih $l = k - 1$, maka terdapat bilangan bulat l sehingga $n - 1 = 2l + 1$. Jadi, $n - 1$ bilangan ganjil.

(2) Untuk membuktikan $p_2 \rightarrow p_3$, misalkan $n - 1$ bilangan ganjil, maka $n - 1 = 2p + 1$, untuk suatu bilangan bulat p. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} n^2 &= [(n - 1) + 1]^2 \\ &= [(2p + 1) + 1]^2 \\ &= (2p + 2)^2 \\ &= 2^2(p + 1)^2 \\ &= 2 \cdot 2(p + 1)^2 \end{aligned}$$

Pilih $q = 2(p + 1)^2$, maka terdapat bilangan bulat q sehingga $n^2 = 2q$. Jadi, n^2 bilangan genap.

(3) Pernyataan $p_3 \rightarrow p_1$ sama dengan $\overline{p_1} \rightarrow \overline{p_3}$ (Jika n bilangan ganjil maka n^2 bilangan ganjil), yang sudah dibuktikan pada contoh 3.1.1.1.

Karena sudah terbukti bahwa $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, dan $p_3 \rightarrow p_1$ benar, maka terbukti bahwa ketiga pernyataan tersebut ekuivalen.

Soal

3.31 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

3.32 Misalkan n sebarang bilangan bulat. Buktikan bahwa $(n + 1)^2 - 1$ adalah bilangan genap jika dan hanya jika n adalah bilangan genap.

3.33 Buktikan bahwa untuk x dan y bilangan-bilangan real berbeda berlaku $(x + 1)^2 = (y + 1)^2$ jika dan hanya jika $x + y = -2$. Selanjutnya bagaimana jika x dan y bilangan-bilangan real yang sama?

3.34 Untuk a dan b bilangan real, buktikan bahwa ketiga pernyataan berikut ekuivalen.

(1) a kurang dari b.

(2) rata-rata dari a dan b lebih dari a.

(3) rata-rata dari a dan b kurang dari b.

Beberapa metode pembuktian dasar di atas tidak selalu dapat digunakan dalam membuktikan setiap pernyataan matematika. Oleh karena itu, tentu kita memerlukan pengalaman untuk dapat melihat teknik pembuktian apa yang sebaiknya kita gunakan untuk menjawab tiap-tiap soal. Satu catatan terpenting adalah kita tidak boleh ragu-ragu dalam mencoba menggunakan metode-metode pembuktian tersebut untuk menyelesaikan pembuktian. Jika satu metode telah dicoba dan tidak berhasil, cobalah metode yang lain.

3.2 Metode Pembuktian Lanjut

Metode-metode pembuktian dalam matematika tidak hanya terbatas pada pembuktian langsung, pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi, dan pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi. Terdapat beberapa metode pembuktian lain yang juga dapat digunakan, di antaranya adalah pembuktian lengkap, pembuktian per kasus, pembuktian keberadaan, pembuktian dengan contoh penyangkal, dan pembuktian mundur.

3.2.1. Pembuktian Lengkap

Pembuktian lengkap adalah pembuktian yang dilakukan dengan menganalisis semua contoh yang mungkin. Pembuktian ini efektif dilakukan apabila pernyataan yang akan dibuktikan hanya berlaku pada himpunan semesta yang berhingga anggotanya dan relatif kecil banyaknya. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2.1.1

Buktikan bahwa $(n + 1)^3 \geq 3^n$ untuk setiap bilangan bulat positif n, dengan $n \leq 4$.

Jawab

Kita akan membuktikan bahwa $(n + 1)^3 \geq 3^n$ untuk $n = 1, 2, 3, 4$.

(1) Untuk $n = 1$,

$(n + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 2^3 = 8$

$3^n = 3^1 = 3$

Karena $8 \geq 3$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$ benar untuk $n = 1$.

(2) Untuk $n = 2$,

$(n + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 3^3 = 27$

$3^n = 3^2 = 9$

Karena $27 \geq 9$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$ benar untuk $n = 2$.

(3) Untuk $n = 3$,

$(n + 1)^3 = (3 + 1)^3 = 4^3 = 64$

$3^n = 3^3 = 27$

Karena $64 \geq 27$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$ benar untuk $n = 3$.

(4) Untuk $n = 4$,

$(n + 1)^3 = (4 + 1)^3 = 5^3 = 125$

$3^n = 3^4 = 81$

Karena $125 \geq 81$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$ benar untuk $n = 4$.

Jadi, $(n + 1)^3 \geq 3^n$ benar untuk $n = 1, 2, 3, 4$.

Contoh 3.2.1.2

Buktikan bahwa persamaan

$$m^2 + 4n^2 = 30$$

tidak memiliki penyelesaian untuk m dan n bilangan bulat positif.

Jawab

Sepintas, tak terlihat bahwa pembuktian lengkap dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan ini. Tetapi perhatikan bahwa dari persamaan

$$m^2 + 4n^2 = 30$$

karena $m^2 \geq 0$ dan $n^2 \geq 0$, kita memiliki

$$m^2 \leq 30$$

$$4n^2 \leq 30$$

Dengan memerhatikan kedua ketaksamaan ini, kita dapat melihat bahwa nilai m yang mungkin hanyalah 1, 2, 3, 4, dan 5, sedangkan nilai n yang mungkin hanyalah 1 dan 2, mengingat m dan n adalah bilangan bulat positif.

Oleh karena itu, semua kemungkinan tertera pada tabel di bawah ini. Nilai $m^2 + 4n^2$ diberikan untuk setiap kemungkinan.

n \ m	1	2	3	4	5
1	5	8	13	20	29
2	19	20	25	32	41

Karena terlihat bahwa $m^2 + 4n^2 \neq 30$ untuk $m = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $n = 1, 2$ sedangkan $m^2 + 4n^2 > 30$ untuk $m > 5$ dan $n > 2$, maka terbukti bahwa persamaan ini tidak memiliki penyelesaian untuk m dan n bilangan bulat positif.

Setelah memerhatikan kedua contoh di atas, semakin jelas terlihat bahwa pembuktian lengkap hanya mungkin dilakukan jika banyaknya contoh-contoh yang mungkin relatif kecil dan terbatas. Sebagai contoh, kita tidak mungkin menggunakan pembuktian lengkap jika pernyataan kita harus dibuktikan berlaku untuk semua bilangan real, sebab bilangan real tak terhingga banyaknya.

Soal

3.35 Buktikan bahwa semua bilangan asli yang kurang dari 7 dapat dituliskan sebagai jumlah dari tiga bilangan yang merupakan kuadrat dari bilangan bulat nonnegatif.

3.36 Buktikan bahwa $n^2 + 1 \geq 2^n$ untuk setiap bilangan bulat positif n yang kurang dari 5.

3.37 Buktikan bahwa persamaan

$$2x^2 + 5y^2 = 14$$

tidak memiliki solusi untuk x dan y bilangan-bilangan bulat.

3.2.2 Pembuktian Per Kasus

Pembuktian per kasus adalah pembuktian suatu pernyataan dengan membagi menjadi seluruh kasus yang mungkin, kemudian membuktikan untuk setiap kasus tersebut satu demi satu.

Secara matematis, misalkan kita akan membuktikan pernyataan $p \rightarrow q$, maka kita membagi proposisi p menjadi $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, kemudian membuktikan masing-masing proposisi $p_i \rightarrow q$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Contoh 3.2.2.1

Buktikan bahwa jika n merupakan bilangan bulat maka $n^2 \geq n$.

Jawab

Kita dapat membuktikan hal ini dengan memerhatikan tiga kasus, yaitu untuk $n = 0$, $n \geq 1$, dan $n \leq -1$.

(1) Untuk $n = 0$,

$n^2 = 0^2$

$n = 0$

Karena $0^2 \geq 0$, maka $n^2 \geq n$ benar untuk $n = 0$.

(2) Untuk $n \geq 1$,

Kalikan kedua ruas pertaksamaan $n \geq 1$ dengan bilangan bulat positif n, maka diperoleh $n^2 \geq n$. Jadi, $n^2 \geq n$ benar untuk $n \geq 1$.

(3) Untuk $n \leq -1$,

Perhatikan bahwa $n^2 \geq 0$, akibatnya jelas bahwa $n^2 > n$, sebab n merupakan bilangan bulat negatif. Jadi, $n^2 \geq n$ benar untuk $n \leq -1$.

Dengan terbuktinya pernyataan ini untuk setiap kasus yang mungkin, maka terbukti bahwa $n^2 \geq n$ untuk semua bilangan bulat n.

Kita perhatikan bahwa pembuktian per kasus harus benar-benar mencakup semua kasus yang mungkin, dan kita harus yakin bahwa tidak ada kasus selain yang telah kita buktikan.

Seringkali kita perlu menggunakan lebih dari satu metode pembuktian dalam menjawab sebuah soal. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2.2.2

Buktikan bahwa jika n bilangan bulat maka $n^2 + 2$ tidak habis dibagi 4.

Jawab

Pertama-tama kita akan membuktikan pernyataan ini dengan kontradiksi. Andaikan ingkarannya benar, yaitu "n bilangan bulat dan $n^2 + 2$ habis dibagi 4."

Karena $n^2 + 2$ habis dibagi 4, maka $n^2 + 2 = 4k$ untuk suatu bilangan bulat k. Selanjutnya bagi menjadi dua kasus, yaitu ketika n genap dan n ganjil.

(1) Jika n merupakan bilangan genap, maka $n = 2l$, untuk suatu bilangan bulat l. Substitusikan:

$$(2l)^2 + 2 = 4k \Leftrightarrow 4l^2 + 2 = 4k$$

Bagi kedua ruas dengan 2 sehingga diperoleh

$$2l^2 + 1 = 2k$$

Pilih $p = l^2$ yang merupakan bilangan bulat, sehingga ruas kiri yaitu $2p + 1$ merupakan bilangan ganjil, sedangkan ruas kanan yaitu $2k$ merupakan bilangan genap. Kontradiksi.

(2) Jika n merupakan bilangan ganjil, maka $n = 2m + 1$, untuk suatu bilangan bulat m. Substitusikan:

$$(2m + 1)^2 + 2 = 4k \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 3 = 4k$$

Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$2(2m^2 + 2m + 1) + 1 = 2(2k)$$

Pilih $q = 2m^2 + 2m + 1$ dan $r = 2k$ yang merupakan bilangan bulat, sehingga ruas kiri yaitu $2q + 1$ merupakan bilangan ganjil, sedangkan ruas kanan yaitu $2r$ merupakan bilangan genap. Kontradiksi.

Karena kita telah menemukan kontradiksi pada kedua kasus, maka pengandaian salah. Sehingga pernyataan semula pastilah benar. Jadi, terbukti bahwa jika n bilangan bulat maka $n^2 + 2$ tidak habis dibagi 4.

Contoh di atas semakin memperlihatkan bahwa kita memerlukan banyak pengalaman dan latihan untuk dapat memandang metode pem-

buktian apa yang tepat untuk membuktikan pernyataan-pernyataan. Selanjutnya perhatikan pula contoh berikut.

Contoh 3.2.2.3

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dan y berlaku $|xy| = |x||y|$.

Jawab

Perhatikanlah definisi nilai mutlak.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ jika } a \geq 0 \\ -a, \text{ jika } a < 0 \end{cases}$$

Jadi, untuk x dan y bilangan real dapat dibagi menjadi empat kasus, yaitu:

(1) x dan y nonnegatif.

(2) x nonnegatif dan y negatif.

(3) x negatif dan y nonnegatif.

(4) x dan y negatif.

Perhatikan setiap kasus tersebut.

(1) Untuk x dan y nonnegatif,

$|xy| = xy$

$|x||y| = xy$

Jadi, terbukti bahwa $|xy| = |x||y|$ untuk x dan y nonnegatif.

(2) Untuk x nonnegatif dan y negatif,

$|xy| = -xy$

$|x||y| = x(-y) = -xy$

Jadi, terbukti bahwa $|xy| = |x||y|$ untuk x nonnegatif dan y negatif.

(3) Untuk x negatif dan y nonnegatif,

$|xy| = -xy$

$|x||y| = (-x)y = -xy$

Jadi, terbukti bahwa $|xy| = |x||y|$ untuk x negatif dan y nonnegatif.

(4) Untuk x dan y negatif,

$|xy| = xy$

$|x||y| = (-x)(-y) = xy$

Jadi, terbukti bahwa $|xy| = |x||y|$ untuk x dan y negatif.

Dengan terbuktinya pernyataan ini untuk setiap kasus yang mungkin, maka terbukti bahwa $|xy| = |x||y|$ untuk x dan y sembarang bilangan real.

Perhatikanlah kembali contoh 3.2.2.3 di atas.

Kasus (2) dan (3) merupakan dua kasus yang mirip, sebenarnya kedua kasus ini sama, hanya variabel x dan y yang ditukar. Oleh sebab itu, untuk mempersingkat pembuktian, kita dapat mengerjakan keduanya bersamaan dengan menambahkan catatan "*tanpa mengurangi keumuman*", bahwa x nonnegatif dan y negatif. Dalam catatan ini tersirat bahwa kita dapat mengerjakan kasus x negatif dan y nonnegatif dengan cara yang sama dengan yang kita gunakan pada kasus x nonnegatif dan y negatif.

Jadi, untuk contoh 3.2.2.3 di atas, tanpa mengurangi keumuman, kita dapat membaginya menjadi 3 kasus, yaitu:

(1) x dan y nonnegatif.
(2) x negatif dan y nonnegatif.
(3) x dan y negatif.

Istilah "*tanpa mengurangi keumuman*" berasal dari bahasa Inggris, yaitu "*without loss of generality*" yang biasa disingkat "*w.l.o.g.*" atau "*w.o.l.o.g.*", digunakan ketika suatu kondisi yang umum dapat dipersempit menjadi yang lebih spesifik, dengan memerhatikan bahwa jika pernyataan tersebut terbukti untuk suatu kondisi spesifik ini, maka pernyataan tersebut terbukti pula untuk kondisi yang umum.

Sebagai ilustrasi sederhana, kita perhatikan bagaimana kita dapat membuktikan pernyataan berikut.

Jika terdapat tiga orang dalam suatu ruangan,
pasti terdapat dua orang berjenis kelamin sama.

Kita dapat membuktikannya dengan cara sebagai berikut.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan orang pertama adalah pria. Kemungkinan-kemungkinan yang ada adalah dua orang yang lain berjenis kelamin sama atau berjenis kelamin berbeda. Untuk kemungkinan pertama, yaitu dua orang yang lain berjenis kelamin sama, maka pernyataan tersebut terbukti. Untuk kemungkinan kedua,

yaitu dua orang yang lain berjenis kelamin berbeda, pasti salah satu di antaranya adalah pria, yang sama dengan jenis kelamin orang pertama, maka pernyataan tersebut terbukti.

Dalam ilustrasi ini terlihat bahwa tanpa mengurangi keumuman kita dapat memisalkan orang pertama adalah pria. Hal ini tidak menjadi masalah seandainya kita memisalkan orang pertama bukan pria melainkan wanita, sebab kita tidak berorientasi pada jenis kelaminnya, melainkan pada banyaknya. Dengan mempersempit kondisi yang ada, yaitu dengan memisalkan orang pertama adalah pria, pernyataan tersebut terbukti secara umum.

Tentu saja penggunaan istilah ini secara keliru dapat menimbulkan kesalahan yang fatal. Sebagai contoh, ketika kita diminta membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

tentu salah jika kita membuktikannya dengan cara sebagai berikut.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $n = 2$, maka

$$1 + 2 = 3 = \frac{1}{2}(2)(2+1)$$

Terbukti.

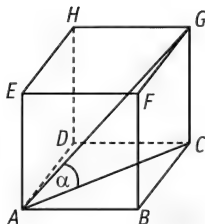
Jelas bahwa pembuktian ini sangat mengurangi keumuman, sebab 2 tidak dapat menjadi "perwakilan" bagi semua bilangan asli n. Pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut. Baiklah, untuk $n = 2$ pernyataan tersebut terbukti. Bagaimana untuk $n = 3$? Tentu kita perlu membuktikan lagi. Setelah itu, bagaimana untuk $n = 4$? Demikian seterusnya dan pertanyaan-pertanyaan ini tidak berujung. Jadi, dalam mempersempit suatu kondisi dengan menggunakan istilah "*tanpa mengurangi keumuman*", kita harus yakin bahwa jika pernyataan tersebut terbukti untuk suatu kondisi spesifik ini, maka pernyataan tersebut terbukti pula untuk kondisi yang umum.

Sebagai penerapan lain dari istilah ini, perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 3.2.2.4

Buktikan bahwa pada sebuah kubus, besar sudut yang dibentuk oleh diagonal bidang dan diagonal ruang yang berpotongan adalah $\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Jawab

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan panjang rusuk kubus ini adalah 1 satuan (karena panjang rusuk kubus tidak mempengaruhi hasil penghitungan besar sudut). Perhatikanlah gambar berikut.

Menurut teorema Pythagoras, panjang AC adalah $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ satuan.

Sehingga diperoleh $\tan\alpha = \frac{GC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Oleh karena itu $\alpha = \arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Jadi, terbukti bahwa pada sebuah kubus, besar sudut yang dibentuk oleh diagonal bidang dan diagonal ruang yang berpotongan adalah $\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Contoh 3.2.2.5

Misalkan A dan B adalah dua himpunan bilangan yang banyak anggotanya berhingga. Misalkan $\max(A)$ dan $\max(B)$ masing-masing menyatakan anggota dari himpunan A dan B yang nilainya terbesar (maksimum). Jika $\max(A) \neq \max(B)$, buktikan bahwa

$$\max(A \cup B) = \max\{\max(A), \max(B)\}$$

Jawab

Arti dari pernyataan akan kita buktikan adalah sebagai berikut. Misalkan ada dua buah himpunan dengan nilai maksimumnya masing-masing. Dengan demikian, nilai maksimum dari gabungan dua himpunan tersebut adalah nilai maksimum dari salah satu himpunan yang terbesar. Untuk membuktikan hal ini, tanpa mengurangi keumuman misalkan

$$\max\{\max(A), \max(B)\} = \max(A)$$

Kita boleh pula memisalkan sebaliknya, tetapi dengan pemisalan di atas diperoleh $\max(A) > \max(B)$. Perhatikan bahwa semua anggota himpunan A pasti nilainya kurang dari $\max(A)$. Demikian pula, semua anggota himpunan B pasti nilainya kurang dari $\max(B)$. Kemudian, anggota-anggota dari $A \cup B$ adalah semua anggota himpunan A dan B. Ini berarti semua anggota dari $A \cup B$ pasti kurang dari $\max(A)$. Artinya, $\max(A)$ adalah nilai maksimum dari $A \cup B$. Dengan demikian kita telah membuktikan kesamaan di atas.

Soal

3.38 Buktikan bahwa jika m, n adalah dua bilangan bulat berurutan, maka $m^2 + n^2 - 1$ habis dibagi 4.

Petunjuk : Gunakanlah pembuktian per kasus dengan memerhatikan kasus m genap dan m ganjil.

3.39 Buktikan bahwa jika x dan y adalah bilangan real, maka

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$$

Petunjuk : Gunakanlah pembuktian per kasus dengan memerhatikan kasus $x \geq y$ dan $x < y$.

3.40 Gunakanlah pembuktian per kasus untuk menunjukkan bahwa

$$\min(a, \min(b,c)) = \min(\min(a,b), c)$$

dengan a, b, c adalah bilangan-bilangan real.

3.41 Buktikan bahwa $|x^n| = |x|^n$ dengan x adalah bilangan real dan n adalah bilangan asli.

3.42 Buktikan bahwa $|x + y| \leq |x| + |y|$ dengan x dan y adalah bilangan-bilangan real.

3.43 Buktikan bahwa kemungkinan digit terakhir dari bilangan-bilangan kuadrat sempurna hanyalah 0, 1, 4, 5, 6, dan 9.

3.44 Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a^2 + b^2$ habis dibagi 3, maka:

a. a^2 dan b^2 keduanya habis dibagi 3.

b. a dan b keduanya habis dibagi 3.

c. $a^2 + b^2$ juga habis dibagi 9.

3.45 Misalkan n adalah bilangan bulat dan $n > 1$ serta $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real positif berbeda. Buktikan bahwa nilai

$$S = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

selalu kurang dari nilai terkecil $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Petunjuk : Tanpa mengurangi keumuman, misalkan nilai terkecil dari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah a_1.

3.46 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x dan y berlaku

$$x^x + y^y \geq x^y + y^x$$

Petunjuk : Karena ketaksamaan ini simetris, tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan $x \geq y$.

3.2.3 Pembuktian Keberadaan

Pembuktian keberadaan adalah pembuktian proposisi $\exists x P(x)$. Pembuktian keberadaan dapat dilakukan dengan cara mencari suatu a sehingga $P(a)$ benar. Pembuktian dengan cara seperti ini disebut pembuktian *konstruktif*. Ada pula cara membuktikan keberadaan yang lain yang disebut cara *nonkonstruktif*, yaitu tanpa mencari suatu a yang spesifik. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah dua contoh berikut.

Contoh 3.2.3.1

Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan pangkat tiga dalam dua cara.

Jawab

Untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dicari satu bilangan bulat positif yang dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan pangkat tiga dalam dua cara.

Setelah melalui penghitungan, diperoleh bahwa

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

Jadi, ada bilangan bulat positif yang dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan pangkat tiga dalam dua cara, yaitu 1729.

Contoh 3.2.3.2

Buktikan bahwa terdapat dua bilangan irasional x dan y sehingga x^y bilangan rasional.

Jawab

Dalam contoh 3.1.3.2 kita telah membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Kini perhatikanlah bilangan $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$. Belum diketahui apakah bilangan ini rasional atau irasional.

(1) Jika $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rasional, maka pilih $x = \sqrt{2}$ dan $y = \sqrt{2}$ sehingga $x^y = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rasional.

(2) Jika $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ irasional, maka pilih $x = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ dan $y = \sqrt{2}$ sehingga

$$x^y = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \text{ rasional.}$$

Jadi, terbukti bahwa ada dua bilangan irasional x dan y sehingga x^y bilangan rasional.

Pembuktian pada contoh 3.2.3.2 di atas merupakan pembuktian nonkonstruktif, sebab pembuktian ini bergantung pada "$\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rasional atau irasional." Lain halnya dengan pembuktian pada contoh 3.2.3.1 yang merupakan pembuktian konstruktif, sebab pada contoh ini kita menemukan suatu contoh yang spesifik (yaitu 1729) yang menjadi bukti bahwa pernyataan tersebut benar.

Masalah yang biasanya muncul dalam pembuktian keberadaan, khususnya pada pembuktian konstruktif, adalah bagaimana kita mencari nilai yang menyebabkan pernyataan tersebut benar. Jika nilai tersebut tidak dapat kita temukan dengan hanya mengumpulkan data, maka kita perlu berpikir lebih jauh. Perhatikan satu contoh lain berikut.

Contoh 3.2.3.3

Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif n sehingga jumlah digit-digit pada bilangan n^2 adalah 2011.

Jawab

Untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dicari satu bilangan bulat positif n sehingga jumlah digit-digit pada bilangan n^2 adalah 2011.
Pilih

$$n = 10^{223} - 3$$

Sehingga diperoleh

$$n^2 = (10^{223} - 3)^2 = 10^{446} - 6 \times 10^{223} + 9 = \underbrace{999...9}_{222}4000...09$$

Perhatikan jumlah digit-digit bilangan ini, yaitu

$$\underbrace{9 + 9 + 9 + ... + 9}_{222} + 4 + 9 = 223 \times 9 + 4 = 2011$$

Jadi, ada bilangan bulat positif n sehingga jumlah digit-digit pada bilangan n^2 adalah 2011.

Soal

3.47 Buktikan bahwa ada bilangan kuadrat sempurna yang dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan kuadrat sempurna yang lain dalam dua cara.

3.48 Buktikan bahwa ada bilangan prima p yang menyebabkan $17p + 1$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.

3.49 Buktikan bahwa ada bilangan asli n sehingga

$$n^2 + n + 2011$$

merupakan bilangan kuadrat sempurna.

3.50 Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang bernilai sama dengan jumlah dari semua bilangan bulat positif yang kurang darinya.

3.51 Buktikan bahwa ada 100 bilangan asli berurutan yang semuanya bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna.

3.52 Apakah terdapat suatu fungsi $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ sehingga $f(f(x)) = -f(x)$ untuk setiap bilangan real x? Buktikanlah.

3.53 Diberikan himpunan

$$S = \{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$$

Buktikan bahwa ada anggota himpunan S yang dapat dituliskan sebagai jumlah kuadrat enam bilangan asli berurutan.

3.54 Buktikan bahwa jika n bilangan bulat ganjil, maka ada suatu bilangan bulat k sehingga n adalah jumlah dari $k - 2$ dan $k + 3$.

3.2.4 Pembuktian dengan Contoh Penyangkal

Pembuktian jenis ini digunakan ketika kita ingin menyangkal suatu pernyataan, dengan kata lain kita ingin membuktikan bahwa suatu pernyataan adalah salah. Hal ini dilakukan dengan cara mencari suatu contoh yang menyebabkan pernyataan tersebut salah. Contoh ini disebut *contoh penyangkal* atau *contoh pengingkar* (*counterexample*).

Contoh 3.2.4.1

Misal diberikan pernyataan berikut.
"Untuk setiap bilangan asli n, $n^2 + n + 17$ adalah bilangan prima."
Buktikan bahwa pernyataan ini salah.

Jawab

Untuk membuktikan bahwa pernyataan ini salah, cukup ditunjukkan bahwa ada suatu bilangan asli yang menyebabkan $n^2 + n + 17$ bukan bilangan prima.
Untuk itu, misalnya diambil $n = 16$, maka perhatikan

$$\begin{aligned} n^2 + n + 17 &= 16^2 + 16 + 17 \\ &= 16 \times 17 + 17 \\ &= 17 \times 17 \end{aligned}$$

Ternyata $n^2 + n + 17$ bukan bilangan prima untuk $n = 16$.
Jadi, terbukti bahwa pernyataan di atas salah.

Dalam contoh di atas, nilai $n = 16$ inilah yang disebut contoh penyangkal (*counterexample*).

Soal

3.55 Tunjukkan bahwa pernyataan "Jika a dan b bilangan-bilangan bulat, maka terdapat bilangan-bilangan bulat m dan n sehingga $a = m + n$ dan $b = m - n$." merupakan pernyataan yang salah. Berikan syarat tambahan sehingga pernyataan ini benar.

3.56 Perhatikan pernyataan "Jika a bilangan real, maka $ax = 0$ mengakibatkan $x = 0$." Tunjukkan bahwa implikasi ini salah. Buatlah sedikit pengubahan agar menjadi benar.

3.57 Salah satu konjektur terkenal berkaitan dengan bilangan prima adalah bahwa

"$n^2 + n - 41$ adalah prima untuk setiap bilangan asli n."

Buktikan bahwa konjektur ini salah.

3.58 Tartaglia (1556) mengklaim bahwa jumlah dari

$$1 + 2 + 4,\ 1 + 2 + 4 + 8,\ 1 + 2 + 4 + 8 + 16,\ \ldots$$

bergantian antara bilangan prima dan komposit.
Buktikanlah bahwa klaim Tartaglia ini salah.

3.59 DeBouvelles (1509) mengklaim bahwa satu atau kedua dari $6n + 1$ dan $6n - 1$ adalah bilangan prima untuk semua n bilangan bulat positif. Buktikanlah bahwa klaim DeBouvelles ini salah.

3.60 Misalkan f, g, h adalah fungsi-fungsi dalam variabel x. Buktikan atau bantah bahwa

$$f(g(x)+h(x)) = f(g(x)) + f(h(x))$$

3.2.5 Pembuktian Mundur

Sebenarnya pembuktian mundur hanya merupakan sarana untuk mempermudah kita menemukan hal yang harus kita buktikan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.2.5.1

Buktikanlah bahwa

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

untuk setiap bilangan real x dan y.

Jawab

Dengan pembuktian mundur, kita mulai berpikir dari pernyataan yang akan dibuktikan, yaitu

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Jika kita kurangkan kedua ruas dengan $2xy$, kita memperoleh

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

atau

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Pernyataan terakhir ini jelas benar untuk setiap bilangan real x dan y. Setelah menemukan hal ini, kita tinggal menuliskan solusinya dengan cara membalik urutan langkah. Jadi, solusi untuk soal ini adalah sebagai berikut.

Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan real x dan y selalu berlaku

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Dengan kata lain,

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

Jika kedua ruas ditambahkan dengan $2xy$, diperoleh

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Terbukti.

Sekali lagi perlu diingat bahwa sebenarnya pembuktian mundur hanyalah merupakan suatu sarana untuk mempermudah pengerjaan bukti. Kita tidak boleh menuliskan solusi dengan berawal dari pernyataan yang akan dibuktikan, sebab kita belum mengetahui ke-

benaran pernyataan yang akan dibuktikan tersebut. Sebagai ilustrasi, misalkan kita diminta membuktikan pernyataan berikut.

Buktikan bahwa $2 = 3$.

Kita mulai dari yang akan dibuktikan yaitu $2 = 3$, maka $3 = 2$ benar sebab persamaan bersifat simetris. Kemudian dengan menjumlahkan kedua persamaan ini diperoleh $5 = 5$ yang jelas benar. Dari sini kita menyimpulkan terbukti bahwa $2 = 3$.

Tentu pembuktian yang dituliskan seperti ini tidak dapat diterima. Kesalahan pertama tentu terletak pada cara pembuktian yang memulai dari yang diketahui. Kesalahan kedua adalah bahwa langkah-langkah yang dilakukan di sini ireversibel, artinya kita tidak dapat membalik urutan langkah-langkah tersebut untuk menuliskan langkah-langkah yang benar. Jadi, pembuktian ini tidak valid.

Untuk menghindari hal-hal semacam ini, solusi yang kita tuliskan hendaknya tetap dalam langkah-langkah yang terurut dan logis.

Soal

3.61 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a dan b berlaku

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

3.62 Buktikan bahwa untuk $0 < x \leq 1$ berlaku

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2x}$$

3.63 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real a, b, dan c berlaku

$$3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2$$

Petunjuk : Gunakan fakta bahwa

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right]$$

3.64 Misalkan lima angka 1 dan empat angka 0 disusun membentuk sebuah lingkaran. Di antara setiap dua angka yang sama disisipkan angka 0 dan di antara setiap dua angka yang berbeda disisipkan angka 1 untuk menghasilkan sembilan angka baru. Kemudian kesembilan angka lama

dihapus. Buktikan bahwa jika kita mengulangi proses ini, kita tidak mungkin pernah mendapatkan sembilan angka nol.

Petunjuk : Bekerjalah mundur dengan mengandaikan bahwa kita berakhir dengan mendapatkan sembilan angka nol. Itu hanya mungkin terjadi jika keadaan sebelumnya adalah 9 angka 1 atau 9 angka 0. Apa artinya masing-masing kasus itu?

3.3 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan suatu cara pembuktian yang ampuh untuk membuktikan suatu pernyataan $P(n)$ selalu benar untuk setiap bilangan asli n. Induksi matematika tidak dapat digunakan untuk menemukan hasil, sehingga biasanya digunakan untuk membuktikan suatu hasil yang diperoleh dengan cara yang lain.

Pembuktian dengan induksi matematika dapat dianalogikan sebagai berikut. Misalkan kita memiliki sederetan kartu domino seperti pada gambar. Kita ingin menjatuhkan sederetan kartu tersebut, dengan usaha seminimal mungkin.

1. Tentu saja pertama kali yang harus kita lakukan adalah berusaha menjatuhkan kartu domino pertama.
   Demikian pula dalam induksi matematika, pertama kali yang harus kita lakukan adalah membuktikan pernyataan untuk $n = 1$, yaitu harus dibuktikan bahwa $P(1)$ benar.
2. Hal yang kedua agar seluruh kartu domino dalam deretan tersebut jatuh, maka harus terjadi sebagai berikut. Jika domino ke-1 jatuh, maka domino ke-2 juga harus jatuh. Jika domino ke-2 jatuh, maka domino ke-3 juga harus jatuh. Jika domino ke-3 jatuh, maka domino ke-4 juga harus jatuh. Demikian seterusnya, kesimpulan kita adalah jika domino ke-k jatuh, maka domino ke-$(k + 1)$ juga harus jatuh. Dengan demikian kita dapat menjamin bahwa seluruh kartu domino dalam deretan tersebut pasti jatuh.

Demikian pula dalam induksi matematika, kita harus membuktikan pernyataan implikasi berikut.

Jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga harus benar.

Dengan terbuktinya pernyataan ini maka kita dapat menjamin bahwa pernyataan $P(n)$ tersebut selalu benar untuk setiap bilangan asli n.

Pembuktian dengan induksi matematika yang dianalogikan dalam jatuhnya domino di atas merupakan induksi matematika yang sederhana. Di samping induksi matematika sederhana ini, akan diperkenalkan pula induksi matematika umum serta induksi matematika kuat.

3.3.1 Induksi Matematika Sederhana

Dari analogi di atas dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah pembuktian suatu pernyataan $P(n)$ dengan induksi matematika sederhana adalah sebagai berikut.

1. Buktikan kebenaran $P(1)$. (*langkah dasar*)
2. Misalkan $P(k)$ benar (*langkah induksi*). Gunakan hal ini untuk membuktikan bahwa $P(k + 1)$ juga benar (*langkah penarikan kesimpulan*).

Pada langkah kedua, anggapan bahwa $P(k)$ benar disebut *hipotesis induksi*. Perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 3.3.1.1

Buktikanlah bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

untuk setiap bilangan asli n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.

   $P(1) \equiv (2 \times 1 - 1) = (1)^2 \Leftrightarrow 1 = 1$ (benar)

2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar.

Misalkan

$$P(k) \equiv 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k-1)$, yaitu:

$$P(k+1) \equiv 1+3+5+\ldots+(2k-1)+\left[2(k+1)-1\right]=(k+1)^2$$

Buktinya adalah sebagai berikut.

Ruas kiri

$$= \underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k^2}+\left[2(k+1)-1\right]$$

$$= k^2 + (2k+2-1)$$

$$= k^2+2k+1$$

$$= (k+1)^2$$

= Ruas kanan

Terbukti bahwa $P(k+1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Soal

3.65 Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

3.66 Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\frac{1}{11\times14}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

3.67 Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{5}{1\times2\times3}+\frac{6}{2\times3\times4}+\frac{7}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

3.68 Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{3}{1\times2\times2}+\frac{4}{2\times3\times2^2}+\frac{5}{3\times4\times2^3}+\ldots+\frac{n+2}{n(n+1)2^n}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$$

3.69 Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}C(n+1,2)$$

3.70 Amatilah bahwa

$$1\times2\times3\times4\times5 = \frac{1}{6}\times(1\times2\times3\times4\times5\times6)$$

$$1\times2\times3\times4\times5+2\times3\times4\times5\times6 = \frac{1}{6}\times(2\times3\times4\times5\times6\times7)$$

$$1\times2\times3\times4\times5+2\times3\times4\times5\times6+3\times4\times5\times6\times7 = \frac{1}{6}\times(3\times4\times5\times6\times7\times8)$$

dan seterusnya.

Tuliskan bentuk umum dari hubungan ini, kemudian buktikan dengan induksi matematika.

Contoh 3.3.1.2

Buktikanlah bahwa

$$n < 2^n$$

untuk setiap bilangan bulat positif n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv n < 2^n$$

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.
   $P(1) \equiv 1 < 2^1 \Leftrightarrow 1 < 2$ (benar)
2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar.
   Misalkan
   $$P(k) \equiv k < 2^k$$
   Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k + 1)$, yaitu:
   $$P(k+1) \equiv k + 1 < 2^{k+1}$$
   Buktinya adalah sebagai berikut.
   $k + 1 < 2^k + 1$ (dari hipotesis ditambahkan 1 pada kedua ruas)
   $< 2^k + 2$ (karena $1 < 2$)
   $\leq 2^k + 2^k$ (karena $2 \leq 2^k$ untuk setiap bilangan bulat positif k)
   $= 2 \times 2^k$
   $= 2^{k+1}$

Jadi, diperoleh bahwa $k + 1 < 2^{k+1}$.

Terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Soal

3.71 Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n selalu berlaku $2^{n+2} > 2n + 5$.

3.72 Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

3.73 Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$$

3.74 Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$$

Petunjuk : Perhatikan bahwa

$$-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{k^2+k+1}{(k^2+k)(k+1)} = -\left(1+\frac{1}{k^2+k}\right)\frac{1}{k+1} \leq -\frac{1}{k+1}$$

Contoh 3.3.1.3

Buktikanlah bahwa $n(n^2 + 2)$ habis dibagi 3, untuk setiap bilangan bulat positif n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv n(n^2 + 2) \text{ habis dibagi } 3$$

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.

   $P(1) \equiv 1(1^2 + 2) = 3$ habis dibagi 3 (benar)

2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar.

   Misalkan

$$P(k) \equiv k(k^2 + 2) \text{ habis dibagi } 3$$

Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k + 1)$, yaitu:

$$P(k + 1) \equiv (k + 1)[(k + 1)^2 + 2] \text{ habis dibagi } 3$$

Buktinya adalah sebagai berikut.

Karena $k(k^2 + 2)$ habis dibagi 3, maka dapat kita misalkan $k(k^2 + 2) = 3p$ untuk suatu bilangan bulat p. Perhatikan:

$$\begin{aligned}(k+1)\left[(k+1)^2+2\right] &= (k+1)(k+1)^2+2(k+1)\\ &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\ &= (k^3+2k)+3k^2+3k+3\\ &= k(k^2+2)+3k^2+3k+3\\ &= 3p+3k^2+3k+3\\ &= 3(p+k^2+k+1)\end{aligned}$$

Pilih $q = p + k^2 + k + 1$ yang merupakan bilangan bulat, sehingga $(k + 1)[(k + 1)^2 + 2] = 3q$. Jadi, $(k + 1)[(k + 1)^2 + 2]$ habis dibagi 3. Terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Soal

3.75 Buktikanlah bahwa $n(n + 1)(n + 5)$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat positif n.

3.76 Buktikanlah bahwa $2^{4n+3} + 3^{3n+1}$ habis dibagi 11, untuk setiap bilangan bulat positif n.

3.77 Buktikanlah bahwa $5^{n+1} - 4n - 5$ habis dibagi 16, untuk setiap bilangan bulat positif n.

3.78 Buktikan bahwa jumlah pangkat tiga dari tiga bilangan asli yang berurutan selalu habis dibagi 9.

Selanjutnya kita perhatikan bahwa dalam membuktikan suatu pernyataan dengan induksi matematika, kedua langkah harus dilakukan, yaitu langkah dasar dan langkah induksi. Jika kita kembali memerhatikan analogi jatuhnya domino di atas, deretan domino tersebut tidak akan jatuh jika kita tidak menjatuhkan domino pertama ataupun jika

jarak antardomino tidak dapat dilampaui domino yang terjatuh. Hal ini memberikan pesan bahwa kita tidak boleh melewatkan satupun langkah yang ada. Kedua contoh berikut ini menunjukkan kesalahan jika kita tidak melakukan salah satu langkah.

Contoh 3.3.1.4

Kesalahan pembuktian induksi matematika tanpa langkah dasar

Buktikanlah bahwa

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$$

untuk setiap bilangan asli n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n)\equiv 1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$$

1. Kita mencoba melewatkan langkah dasar.
2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar.

   Misalkan

$$P(k)\equiv 1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{8}(2k+1)^2$$

   Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k+1)$, yaitu:

$$P(k+1)\equiv 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{8}(2k+3)^2$$

   Buktinya adalah sebagai berikut.

   Ruas kiri

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{1+2+3+\ldots+k}+(k+1)\\
&= \quad \frac{1}{8}(2k+1)^2 \quad +(k+1)\\
&= \frac{1}{8}(4k^2+4k+1+8k+8)\\
&= \frac{1}{8}(4k^2+12k+9)\\
&= \frac{1}{8}(2k+3)^2\\
&= \text{Ruas kanan}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Kegagalan

Sebagai pemeriksaan, apabila kita substitusikan $n = 1$, perhatikanlah bahwa

$$P(1) \equiv 1 = \frac{1}{8}(2 \times 1 + 1)^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{9}{8} \text{ (salah)}$$

Contoh 3.3.1.5

Kesalahan pembuktian induksi matematika tanpa langkah induksi

Buktikanlah bahwa

$$\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

selalu merupakan bilangan dua berpangkat untuk setiap bilangan asli n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan $P(n)$ menyatakan

$$\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

selalu merupakan bilangan dua berpangkat untuk setiap bilangan asli n.

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.

   Untuk $n = 1$, nilai dari

   $$\begin{aligned}\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) &= \frac{1}{24}\left[1^4 - 6(1)^3 + 23(1)^2 - 18(1) + 24\right] \\ &= \frac{1}{24}(1 - 6 + 23 - 18 + 24) \\ &= \frac{1}{24}(24) \\ &= 1, \text{ yang merupakan } 2^0.\end{aligned}$$

   Jadi, benar bahwa $P(1)$ merupakan bilangan dua berpangkat.

2. Substitusikanlah $n = 2, 3, 4, 5$ dan kita memperoleh 2, 4, 8, 16 yang masing-masing merupakan 2^1, 2^2, 2^3, 2^4.

Kegagalan

Dari hasil ini kita belum dapat menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n, sebab bilangan asli tak terhingga banyaknya, dan kita tidak mungkin mensubstitusikan nilai bilangan asli n satu demi satu untuk membuktikan kebenaran $P(n)$.

Sebagai pemeriksaan, apabila kita substitusikan $n = 6$, perhatikanlah bahwa

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) &= \frac{1}{24}\left[6^4 - 6(6)^3 + 23(6)^2 - 18(6) + 24\right] \\ &= \frac{1}{24}(1296 - 1296 + 828 - 108 + 24) \\ &= \frac{1}{24}(744) \\ &= 31, \text{ yang bukan merupakan bilangan dua berpangkat. (salah)}\end{aligned}$$

Kedua contoh di atas memperlihatkan bahwa dalam menggunakan induksi matematika hendaknya tidak ada langkah yang terlewatkan.

Soal

3.79 Tanpa mengerjakan langkah dasar, buktikan bahwa

$$1 + 3 + 5 + 7 \ldots + (2n - 1) = n^2 + 1$$

Tunjukkan satu contoh penyangkal untuk memperlihatkan bahwa pembuktian ini salah.

3.80 Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut.

Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

untuk setiap bilangan asli n.

Sebagai langkah dasar, pernyataan ini benar untuk $n = 1$, sebab

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$$

Sebagai langkah induksi, misalkan pernyataan ini benar untuk $n = k$,

yaitu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k}=\frac{3}{2}-\frac{1}{k}$$

Maka untuk $n = k + 1$,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k}+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}$$

Jadi, pernyataan ini benar untuk $n = k + 1$.

Jadi, terbukti bahwa pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Berikut adalah satu contoh penggunaan induksi matematika dalam pembuktian teorema yang terkenal. Teorema berikut ini adalah teorema Fermat kecil (*Fermat's little theorem*), salah satu teorema yang terkenal di cabang teori bilangan.

Contoh 3.3.1.6

Teorema Fermat kecil

Buktikan bahwa jika n bilangan asli dan p bilangan prima, maka $n^p - n$ selalu habis dibagi p.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv n^p - n \text{ habis dibagi } p$$

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.

$$P(n) \equiv 1^p - 1 = 0 \text{ habis dibagi } p \text{ (benar)}$$

2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar.

   Misalkan

$$P(k) \equiv k^p - k \text{ habis dibagi } p$$

   Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k + 1)$, yaitu:

$$P(k + 1) \equiv (k + 1)^p - (k + 1) \text{ habis dibagi } p$$

Buktinya adalah sebagai berikut.

Karena $k^p - k$ habis dibagi p, maka dapat kita misalkan $k^p - k = pm$ untuk suatu bilangan bulat m. Perhatikan bahwa menurut teorema binomial,

$$(k+1)^p - (k+1) = \left[k^p + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \ldots + 1\right] - (k+1)$$

$$= pm + \binom{p}{1}k^{p-1} + \binom{p}{2}k^{p-2} + \ldots$$

Seluruh koefisien dari penjabaran ini pasti habis dibagi p untuk $1 \le r \le p - 1$, sebab dari definisi kombinasi kita mengetahui

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!}$$

Karena p adalah bilangan prima, tentu p habis membagi pembilang yaitu $p! = p(p - 1)$, tetapi tidak habis membagi penyebut, sebab penyebut tidak memiliki faktor p.

Jadi, $(k + 1)^p - (k + 1)$ habis dibagi p.

Terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Soal-soal berikut adalah penerapan induksi matematika untuk membuktikan teorema maupun pernyataan lainnya yang lebih membutuhkan analisis.

Soal

3.81 Gunakanlah induksi matematika pada n untuk membuktikan teorema binomial, yaitu untuk x dan y adalah variabel dan n adalah bilangan bulat positif berlaku

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Petunjuk : Ingatlah kembali identitas Pascal, yaitu

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

untuk n dan r bilangan asli sehingga $1 \le r \le n$.

3.82 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n,

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

selalu merupakan bilangan bulat.

Petunjuk : Jika diketahui $f(k)=\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}$ merupakan bilangan bulat, maka untuk membuktikan bahwa $f(k+1)$ juga merupakan bilangan bulat dapat dilakukan dengan cara membuktikan bahwa $f(k+1)-f(k)$ merupakan bilangan bulat.

3.83 (***hanya untuk yang sudah mempelajari matriks***)

Perhatikan matriks berbentuk

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Buktikanlah bahwa

$$A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

untuk setiap bilangan asli n.

3.3.2 Induksi Matematika Umum

Perhatikan kembali analogi jatuhnya domino di atas. Untuk menjatuhkan semua domino, kita tentu tidak harus memulainya dengan menjatuhkan domino pertama. Kita dapat pula memulainya dengan menjatuhkan domino kedua atau domino ketiga, misalnya.

Adakalanya pernyataan yang akan kita buktikan tidak selalu berlaku untuk setiap bilangan asli n, melainkan terdapat suatu nilai terkecil yang menjadi batas bawah di mana pernyataan tersebut berlaku. Nilai terkecil ini selanjutnya dinotasikan n_0. Untuk membuktikan pernyataan semacam itu, langkah dasar kita ganti dengan membuktikan kebenaran Pn_0. Nilai n_0 merupakan bilangan bulat.

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan. Langkah-langkah induksi matematika umum untuk membuktikan kebenaran pernyataan $P(n)$ untuk setiap bilangan bulat n dengan $n \geq n_0$ adalah sebagai berikut.

1. Buktikan kebenaran $P(n_0)$. (*langkah dasar*)
2. Misalkan $P(k)$ benar untuk $k \geq n_0$ (*langkah induksi*). Gunakan hal ini untuk membuktikan bahwa $P(k + 1)$ juga benar (*langkah penarikan kesimpulan*).

Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.3.2.1

Buktikanlah bahwa

$$n^2 \geq 2n + 7$$

untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv n^2 \geq 2n + 7$$

Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n dengan $n \geq 4$.

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(4)$.
   $P(4) \equiv 4^2 \geq 2(4) + 7 \Leftrightarrow 16 \geq 15$ (benar)
2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar untuk $k \geq 4$.
   Misalkan
   $$P(k) \equiv k^2 \geq 2k + 7 \text{ untuk } k \geq 4$$
   Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k + 1)$, yaitu:
   $$P(k + 1) \equiv (k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 7$$
   Buktinya adalah sebagai berikut.
   $$\begin{aligned} k^2 &\geq 2k + 7 \quad \text{(dari hipotesis)} \\ k^2 + 2k + 1 &\geq 4k + 8 \quad \text{(ditambahkan } 2k + 1 \text{ pada kedua ruas)} \\ (k + 1)^2 &\geq 4k + 8 \\ &= 2(k + 1) + 2(k + 3) \quad \text{(manipulasi aljabar)} \end{aligned}$$

$\geq 2(k + 1) + 2(7)$ (karena $k \geq 4$ maka $k + 3 \geq 7$)

$= 2(k + 1) + 14$

$\geq 2(k + 1) + 7$ (karena $14 \geq 7$)

Jadi, diperoleh bahwa $(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 7$.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Soal

3.84 Buktikan bahwa

$$3^n > 2n^2 + 3n$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 4$.

3.85 Buktikan bahwa

$$n! > 3^n$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 7$.

3.86 Buktikan bahwa

$$(2n)! < (n!)^2 \times 4^{n-1}$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

3.87 Buktikan bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n.

3.88 Untuk dua soal berikut, m merupakan bilangan asli tertentu. Buktikan dengan induksi matematika pada bilangan bulat nonnegatif n.

a. $$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \frac{(m+3)!}{3!} + \ldots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)!}$$

b. $$1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m+1)}{2!} + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{n!}$$

3.89 Untuk setiap bilangan asli n yang manakah berlaku

$$n^2 < n!$$

Buktikanlah dengan induksi matematika.

3.90 Buktikan bahwa $n^2 - 7n + 12$ selalu bernilai nonnegatif jika n adalah bilangan bulat yang lebih dari 3.

3.91 Buktikan bahwa

$$1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n - 1) \geq 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n - 2)$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$.

Contoh 3.3.2.2

Di suatu tempat, mata uang logam hanya terdiri atas pecahan 4 sen dan 5 sen. Buktikan bahwa dengan kedua jenis pecahan tersebut, kita dapat membayar sejumlah berapapun yang tidak kurang dari 12 sen.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa kita dapat membayar sejumlah n menggunakan pecahan 4 sen dan 5 sen tersebut, di mana $n \geq 12$.

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(12)$.
   Untuk membayar sejumlah 12 sen, tentu dapat digunakan 3 keping mata uang logam 4 sen. Jadi, $P(12)$ benar.
2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar, dengan $k \geq 12$. Artinya, kita memisalkan bahwa untuk membayar sejumlah k sen, dengan $k \geq 12$, kita dapat menggunakan pecahan 4 sen dan 5 sen. Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k + 1)$, yaitu bahwa untuk membayar sejumlah $k + 1$ sen, kita dapat menggunakan pecahan 4 sen dan 5 sen. Kita gunakan pembuktian per kasus, yaitu:
   a. Kasus pertama, jika dalam membayar sejumlah k sen tersebut kita menggunakan minimal satu pecahan 4 sen. Dengan mengganti uang logam 4 sen tersebut dengan satu uang logam 5 sen, akan diperoleh jumlah $k + 1$ sen.
   b. Kasus kedua, jika dalam membayar sejumlah k sen tersebut kita sama sekali tidak menggunakan pecahan 4 sen. Artinya, semua pecahan yang kita gunakan hanyalah pecahan 5 sen. Karena $k \geq 12$, maka minimal ada sebanyak tiga uang logam 5

sen yang kita gunakan. Dengan mengganti ketiga uang logam 5 sen tersebut dengan 4 uang logam 4 sen, akan diperoleh jumlah $k + 1$ sen.

Jadi, kita telah membuktikan $P(k + 1)$.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 12$.

Soal

3.92 Buktikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen, dengan $n \geq 8$, selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen.

3.93 Satuan mata uang di planet Pluto adalah Pluton, dan mata uang yang ada hanya dalam pecahan 5 Pluton dan 7 Pluton. Berapa sajakah jumlah yang dapat dibayar oleh para penduduk planet Pluto dengan dua pecahan ini?

Kini kita akan menggunakan induksi matematika ini untuk membuktikan prinsip inklusi-eksklusi untuk n himpunan, yang telah kita bahas dalam bab dasar-dasar berhitung.

Contoh 3.3.2.3

Prinsip inklusi-eksklusi

Misalkan n bilangan asli dengan $n \geq 2$. Buktikan bahwa untuk n himpunan $A_1, A_2, \ldots,$ dan A_n berlaku

$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_n) - n(A_1 \cap A_2)$
$- n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$P(n) \equiv n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_n) - n(A_1 \cap A_2)$
$- n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

1. Sebagai langkah dasar kita perlu membuktikan $P(2)$, yaitu

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

Hal ini sudah pernah kita buktikan pada bab dasar-dasar berhitung.

2. Selanjutnya, kita misalkan $P(k)$ benar untuk $k \geq 2$, yaitu

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) + \ldots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \quad (1)$$

Dengan menggunakan hal ini, kita harus membuktikan $P(k+1)$, yaitu:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1}) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_{k+1}) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_k \cap A_{k+1}) + \ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1})$$

Buktinya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1}) \\ &= n[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}] \\ &= n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) + n(A_{k+1}) - n[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}] \\ &= n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) + n(A_{k+1}) - n[(A_1 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})] \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hipotesis induksi pada $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$ dan $n[(A_1 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})]$ diperoleh

$$\begin{aligned} &= [n(A_1) + \ldots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - \ldots - n(A_1 \cap A_k) + \ldots \\ &\quad + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)] + n(A_{k+1}) - [n(A_1 \cap A_{k+1}) + \ldots \\ &\quad + n(A_k \cap A_{k+1}) + \ldots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1})] \\ &= n(A_1) + \ldots + n(A_{k+1}) - n(A_1 \cap A_2) - \ldots - n(A_k \cap A_{k+1}) + \ldots \\ &\quad + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}) \end{aligned}$$

Jadi, kita telah membuktikan $P(k + 1)$.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Sebelum diberikan soal-soal, akan ditinjau satu permasalahan yang cukup terkenal berkaitan dengan induksi matematika. Permasalahan ini sering disebut *pertarungan kue pai*.

Contoh 3.3.2.4

Pertarungan kue pai

Misalkan sekumpulan orang sebanyak ganjil sedang berkumpul di suatu lapangan dengan jarak antarorang berbeda satu sama lain. Setiap orang memegang satu kue pai yang siap dilemparkan ke orang lain yang berjarak paling dekat dengannya. Jika semua pelemparan dilakukan pada saat yang sama, buktikan bahwa paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan $P(n)$ adalah pernyataan "Paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai pada pertarungan kue pai dengan $2n + 1$ orang."

1. Sebagai langkah dasar, $P(0)$ adalah pernyataan bahwa paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai pada pertarungan kue pai dengan 1 orang. Hal ini cukup jelas karena jika hanya terdapat satu orang maka tidak akan ada yang melempar kue pai ke orang tersebut.
2. Sekarang misalkan $P(k)$ benar untuk $n = k \geq 0$, yaitu paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai pada pertarungan kue pai dengan $2k + 1$ orang, dan kita akan memperlihatkan bahwa $P(k + 1)$ benar, yaitu paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai pada pertarungan kue pai dengan $2(k + 1) + 1$ orang. Misalkan di antara $2k + 3$ orang ini, A dan B adalah dua orang dengan jarak terdekat, maka A dan B saling melempar pai satu sama lain. Kemudian, jika ada seseorang yang lain melempar pai ke salah satu dari A atau B, maka untuk $2k + 1$ orang selain A dan B hanya tersisa $2k$ kue pai yang belum dilempar. Berkaitan dengan prinsip rumah merpati, keadaan ini menjamin bahwa pasti terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai. Di sisi lain, jika tidak ada yang melempar pai ke A maupun B, maka untuk $2k + 1$ orang selain A dan B tersisa $2k + 1$ kue pai yang masih dipegang oleh masing-masing orang. Dengan kata lain, terjadilah pertarungan kue pai dengan $2k + 1$ orang. Berdasarkan hipotesis induksi, paling sedikit terdapat satu orang yang tidak terkena lemparan kue pai.

Jadi, $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n. Dengan prinsip induksi matematika kita telah membuktikan hal di atas.

3.3.3 Induksi Kuat

Pada induksi yang telah dibahas sebelumnya, hipotesis induksi hanya terdiri atas anggapan kebenaran satu pernyataan, yaitu $P(k)$. Ada

jenis induksi yang lain, yaitu induksi kuat. Pada induksi kuat, dalam hipotesis induksi kita menganggap benar semua pernyataan

$$P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \ldots, P(k)$$

yaitu semua pernyataan untuk nilai n dari batas bawah sampai dengan k, dan kita harus membuktikan kebenaran $P(k + 1)$.

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan. Langkah-langkah induksi kuat untuk membuktikan kebenaran pernyataan $P(n)$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq n_0$ adalah sebagai berikut.

1. Buktikan kebenaran $P(n_0)$. (*langkah dasar*)
2. Misalkan

   $$P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \ldots, P(k)$$

   benar untuk $k \geq n_0$ (*langkah induksi*). Gunakan hal ini untuk membuktikan bahwa $P(k + 1)$ juga benar. (*langkah penarikan kesimpulan*)

Perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 3.3.3.1

Teorema Dasar Aritmatika

Buktikanlah bahwa setiap bilangan positif $n \geq 2$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa n dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima.

Kita akan membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

1. Pertama, $P(2)$ benar, karena 2 dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu bilangan prima, yaitu 2.
2. Selanjutnya, kita misalkan

   $$P(2), P(3), P(4), \ldots, P(k)$$

   benar. Artinya, 2, 3, 4, ..., k dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima. Akan dibuktikan $P(k + 1)$, yaitu bahwa $k + 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima. Kita gunakan pembuktian per kasus, yaitu:

a. Kasus pertama, jika $k + 1$ merupakan bilangan prima, maka $k + 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu bilangan prima, yaitu $k + 1$ itu sendiri.

b. Kasus kedua, jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka pembagi dari $k + 1$ tidak hanya 1 dan $k + 1$. Ada bilangan asli lain, misalkan a, dengan $2 \leq a \leq k$, yang juga habis membagi $k + 1$. Misalkan hasil bagi ini adalah b, maka

$$\frac{k+1}{a} = b \Leftrightarrow k + 1 = ab$$

Karena $2 \leq a, b \leq k$, maka nilai-nilai a dan b yang mungkin adalah 2, 3, 4, ..., k. Berdasarkan hipotesis induksi, kita mengetahui bahwa bilangan-bilangan tersebut dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima. Jadi, ab dapat pula dinyatakan sebagai hasil kali dari satu atau lebih bilangan prima.

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Contoh 3.3.3.2

Permainan Nim

Terdapat suatu permainan yang melibatkan dua orang dengan aturan sebagai berikut. Permainan ini dimulai dengan sejumlah koin yang dibagi dalam dua tumpukan dan kedua orang tersebut bermain bergantian. Dalam setiap giliran, pemain mengambil sejumlah koin dalam salah satu tumpukan. Pemenangnya adalah pemain yang mengambil koin terakhir. Buktikan bahwa jika permainan diawali dengan dua tumpukan koin yang sama banyak maka dengan strategi tertentu pemain kedua selalu memenangkan permainan ini.

Jawab

Sebelumnya perlu kita ketahui bahwa strategi bagi pemain kedua untuk memenangkan permainan ini adalah sebagai berikut. Jika pemain pertama mengambil sejumlah koin dari salah satu tumpukan, maka pemain kedua mengambil koin dengan jumlah yang sama dari tumpukan yang

lain. Demikian seterusnya. Kini kita akan membuktikan dengan induksi kuat bahwa dengan strategi ini pemain kedua akan selalu menang. Misalkan $P(n)$ menyatakan pemenang kedua selalu memenangkan permainan ini jika digunakan n koin dalam masing-masing tumpukan, dengan $n \geq 1$.

1. Pertama, kita akan membuktikan kebenaran $P(1)$.

   Jika hanya digunakan 1 koin dalam masing-masing tumpukan, pemain pertama akan mengambil satu koin dalam tumpukan pertama lalu pemain kedua mengambil koin yang lain. Hal ini berarti pemain kedua memenangkan permainan ini.

2. Selanjutnya, kita misalkan

   $$P(1), P(2), P(3), \ldots, P(k)$$

   benar. Artinya, pemain kedua pasti menang jika digunakan sebanyak 1, 2, 3, ..., maupun k koin dalam masing-masing tumpukan. Akan dibuktikan $P(k + 1)$, yaitu bahwa pemain kedua pasti menang jika digunakan sebanyak $k + 1$ koin dalam masing-masing tumpukan.

   Jika digunakan sebanyak $k + 1$ koin dalam masing-masing tumpukan, maka terdapat dua kasus yang dapat terjadi, yaitu:

   a. Kasus pertama, pemain pertama mengambil semua $k + 1$ koin dalam salah satu tumpukan. Jika demikian, pemain kedua akan mengambil $k + 1$ koin dalam tumpukan yang lain. Jadi, pemain kedua memenangkan permainan ini.

   b. Kasus kedua, pemain pertama mengambil tidak semua koin dalam salah satu tumpukan, misalkan sebanyak j, dengan $1 \leq j \leq k$. Jika demikian, pemain kedua akan mengambil sebanyak j koin dalam tumpukan yang lain. Ini menyisakan suatu permainan baru dengan $k + 1 - j$ koin dalam masing-masing tumpukan dan diawali dengan giliran pemain pertama. Karena $1 \leq k + 1 - j \leq k$, maka kemungkinan-kemungkinan banyaknya koin dalam masing-masing tumpukan adalah 1, 2, 3, ..., atau k koin. Berdasarkan hipotesis induksi, kita mengetahui bahwa jika digunakan sebanyak 1, 2, 3,

..., maupun k koin dalam masing-masing tumpukan, maka pemain kedua pasti memenangkan permainan ini.

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli n.

Soal

3.94 Terdapat suatu permainan dengan aturan sebagai berikut. Kita memulai dengan satu tumpukan n koin. Dalam setiap langkah, kita memilih salah satu tumpukan kemudian koin-koin dalam tumpukan tersebut kita bagi menjadi dua tumpukan baru yang tidak harus sama banyak. Langkah-langkah ini kita lakukan sampai setiap tumpukan hanya terdiri atas 1 koin. Skor kita dihitung dengan cara sebagai berikut. Skor awal adalah nol, dan setiap kali kita membagi suatu tumpukan menjadi dua tumpukan baru, skor kita ditambahkan dengan hasil kali banyaknya koin dalam kedua tumpukan baru tersebut. Sebagai contoh, kita mulai dengan 5 koin dalam satu tumpukan. Misalnya langkah pertama kita membagi 5 koin tersebut menjadi dua tumpukan baru, masing-masing 3 koin dan 2 koin, maka skor kita adalah $0 + 3 \times 2 = 6$. Langkah berikutnya, kita membagi tumpukan 2 koin menjadi dua tumpukan baru, masing-masing 1 koin, maka sekarang kita memiliki tumpukan 3 koin, 1 koin, 1 koin, dan skor kita $6 + 1 \times 1 = 7$. Langkah berikutnya, kita membagi tumpukan 3 koin menjadi dua tumpukan baru, masing-masing 1 koin dan 2 koin, maka sekarang kita memiliki tumpukan 1 koin, 2 koin, 1 koin, 1 koin, dan skor kita $7 + 1 \times 2 = 9$. Langkah terakhir, kita membagi tumpukan 2 koin menjadi dua tumpukan baru, masing-masing 1 koin dan 1 koin, maka sekarang kita telah memiliki 5 tumpukan yang masing-masing terdiri atas 1 koin, dan skor akhir kita $9 + 1 \times 1 = 10$.

Kita akan membuktikan bahwa jika kita memulai dengan n koin, bagaimanapun langkah yang kita lakukan selalu menghasilkan skor akhir $\frac{n(n-1)}{2}$.

a. Sebagai langkah dasar, buktikan pernyataan tersebut jika kita memulai dengan 1 koin.

b. Misalkan $P(i)$ benar, untuk setiap $i = 1, 2, 3, ..., k$.

Artinya, jika kita memulai dengan i koin, bagaimanapun langkah yang kita lakukan selalu menghasilkan skor akhir $\frac{i(i-1)}{2}$. Kita harus membuktikan bahwa jika kita memulai dengan $k + 1$ koin, bagaimanapun langkah yang kita lakukan selalu menghasilkan skor akhir $\frac{k(k+1)}{2}$.

Misalkan dalam langkah pertama, $k + 1$ koin tersebut dibagi menjadi dua tumpukan yang masing-masing terdiri atas m koin dan $k + 1 - m$ koin, maka skor akhir kita adalah $m(k + 1 - m)$ ditambahkan dengan skor akhir yang kita peroleh jika kita memulai dengan m koin dan $k + 1 - m$ koin, sehingga berdasarkan hipotesis induksi di atas diperoleh skor akhir

$$m(k+1-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(k+1-m)(k+1-m-1)}{2}$$

Buktikan bahwa bentuk ini sama dengan $\frac{k(k+1)}{2}$.

c. Tariklah kesimpulan.

3.95 Pada *jigsaw puzzle*, teka-teki menyusun potongan gambar, kita mulai dengan sejumlah potongan-potongan gambar. Langkah menyelesaikan teka-teki ini terdiri dari merangkai dua potongan untuk membentuk sebuah blok, memasangkan satu potongan pada sebuah blok, atau merangkai dua buah blok membentuk satu blok yang lebih besar. Gunakan induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki menyusun potongan gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Petunjuk : Pada langkah induksi, perhatikan langkah terakhir dalam penyelesaian teka-teki tersebut. Bagilah menjadi tiga macam kasus langkah terakhir yang dapat terjadi.

3.4 Beberapa Strategi Pemecahan Masalah

Untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah, kita harus sering berlatih menghadapi masalah tersebut. Memahami masalah kemudian berusaha menyusun dan melakukan strategi pemecahan masalah tersebut, lalu mencoba menuliskan solusi dengan baik.

Ada suatu ucapan yang mengatakan "*If you want to learn to swim, you need to jump into the water*", yang berarti jika Anda ingin belajar berenang, Anda harus masuk ke dalam air. Dalam kaitan dengan pemecahan masalah, kutipan ini menyiratkan bahwa untuk dapat mengasah kemampuan kita dalam memecahkan masalah, kita harus mau dan tidak ragu untuk "terjun" ke dalam masalah-masalah tersebut.

Kutipan lain mengatakan "*If you want to be able to ride a bike, you must fall at least once*", yang kurang lebih memberikan pesan bahwa kita tidak perlu takut akan kegagalan. Kita harus percaya bahwa keberhasilan akan kita peroleh setelah kita mengalami kegagalan tersebut.

Langkah yang paling membutuhkan pemikiran di antara langkah-langkah pemecahan masalah menurut Polya adalah ketika kita harus menyusun strategi. Berikut akan dibahas beberapa strategi yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah, di antaranya adalah mengumpulkan data, menerka, dan membuktikan, menyelesaikan masalah serupa yang lebih sederhana, mencoba atau mendaftar satu demi satu kemungkinan, membagi masalah menjadi beberapa kasus, memandang masalah dengan cara lain, menerka dan membuktikan terkaan, bekerja mundur, menggunakan variabel, menggunakan prinsip paritas, membuat gambar atau figur yang membantu, memanfaatkan kesimetrian dalam masalah, serta memerhatikan kasus ekstrem. Pada bagian akhir akan dibahas pula pentingnya strategi psikologis, yaitu berkaitan dengan sikap kita dalam memecahkan masalah.

Penting untuk diingat bahwa hendaknya kita fleksibel dalam menerapkan strategi-strategi tersebut, sebab strategi-strategi yang akan dibahas berikut bukanlah untuk dihafalkan. Tidak menutup kemungkinan bahwa kita dapat menyelesaikan suatu masalah matematika dengan strategi kita sendiri.

3.4.1 Mengumpulkan Data, Menerka, dan Membuktikan

Dalam menghadapi suatu soal matematika, seringkali kita tidak memiliki ide untuk memecahkannya, dan hal ini membuat kita tidak mengerti apa yang harus dikerjakan. Salah satu cara mengatasinya adalah mengawalinya dengan mengumpulkan data. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.4.1.1

Hitunglah banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong dan himpunan itu sendiri) yang dapat dibuat dari suatu himpunan beranggotakan n elemen.

Jawab

Sebenarnya kita telah membahas hal ini dalam bab dasar-dasar berhitung. Namun marilah kita mencoba menyelesaikan seolah-olah kita belum pernah menemui soal ini sebelumnya. Tentu terasa sulit jika kita menjawab soal ini dengan langsung memerhatikan himpunan beranggotakan n elemen. Kita mencoba mengumpulkan data.

Banyak elemen	Bentuk himpunan	Himpunan bagian	Banyak himpunan bagian
1	$\{a\}$	$\{\ \}$ $\{a\}$	2
2	$\{a,b\}$	$\{\ \}$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{a,b\}$	4
3	$\{a,b,c\}$	$\{\ \}$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{a,b\}$ $\{b,c\}$ $\{a,c\}$ $\{a,b,c\}$	8

4	$\{a,b,c,d\}$	$\{\ \}$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{a,d\}$ $\{b,c\}$ $\{b,d\}$ $\{c,d\}$ $\{a,b,c\}$ $\{a,b,d\}$ $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}$	16

Dari data di atas, jelas terlihat bahwa :
Untuk $n = 1$, banyak himpunan bagian adalah $2^1 = 2$.
Untuk $n = 2$, banyak himpunan bagian adalah $2^2 = 4$.
Untuk $n = 3$, banyak himpunan bagian adalah $2^3 = 8$.
Untuk $n = 4$, banyak himpunan bagian adalah $2^4 = 16$.
Data ini mengarah pada suatu dugaan bahwa banyak himpunan bagian dari himpunan beranggotakan n elemen adalah 2^n.

Perlu diingat bahwa kesimpulan tadi hanyalah merupakan suatu terkaan (dugaan atau konjektur). Jadi, mengumpulkan data hanyalah suatu sarana yang dapat membantu kita untuk memperoleh terkaan tersebut. Terkaan tersebut tentu tidak selalu benar, tergantung pemikiran kita. Oleh karena itu, kita perlu membuktikannya. Kita dapat menggunakan metode-metode yang telah dibahas pada bagian sebelumnya.

Misalkan kita akan membuktikan dugaan tadi dengan pembuktian langsung. Jika kita pandang himpunan-himpunan bagian yang

ada dalam data di atas, terlihat bahwa setiap elemen memiliki dua kemungkinan, yaitu muncul atau tidak muncul dalam himpunan-himpunan bagian tersebut. Karena terdapat sebanyak n elemen, maka terdapat sebanyak

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n} = 2^n$$

himpunan bagian.

Dengan demikian, kita telah membuktikan terkaan tersebut dan permasalahan terselesaikan.

Dalam belajar pemecahan masalah matematika diperlukan belajar menerka (menebak) lalu membuktikan atau memeriksa kebenaran terkaan tersebut. Kita ingat kembali bahwa teknik pembuktian tertentu, seperti induksi matematika, tidak dapat digunakan untuk menemukan hasil. Oleh sebab itu, kitalah yang harus menemukan hasil tersebut dengan cara yang lain. Salah satunya adalah dengan menerka (*educated guess*) seperti pada contoh di atas.

Dalam mengumpulkan data, hendaknya kita berhenti ketika kita telah benar-benar merasa yakin akan kebenaran dugaan kita. Untuk itu, kita perlu meluangkan waktu untuk melakukan hal ini. Mengumpulkan data bukanlah hal yang sulit, namun memang membutuhkan kesabaran untuk melakukannya. Jadi, luangkanlah waktu. Janganlah ragu untuk meluangkan waktu kita dalam menyelesaikan masalah, sekalipun ketika kita tidak melakukan apa pun. Kadangkala hanya dengan melihat beberapa saat, inspirasi muncul dengan sendirinya. Perhatikanlah contoh berikut sebagai ilustrasi.

Contoh 3.4.1.2

Perhatikanlah kolom-kolom berikut. Jika kita melanjutkan menulis bilangan-bilangan asli dari 2 hingga 1000 berdasarkan pola yang ada, dalam kolom manakah bilangan 1000 akan terletak?

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
	2		3		4		5
9		8		7		6	
	10		11		12		13
17		16		15		14	
	18		19		20		21
25		24		23		22	
	26		27		28		29
				...		30	

Jawab

Cobalah jangan melakukan apapun, namun luangkanlah waktu untuk memerhatikan kolom-kolom di atas baik-baik. Cobalah menemukan suatu pola, hanya dengan melihat kolom di atas.

Setelah beberapa saat melihat, umumnya akan muncul sesuatu di benak kita. Tidak membutuhkan waktu yang lama untuk memerhatikan bahwa kolom *C* adalah kolom yang berisi bilangan-bilangan kelipatan 8.

Jika demikian, karena bilangan 1000 habis dibagi 8, tentu 1000 terletak pada kolom *C*.

Secara lebih mendalam, strategi ini akan dibahas kembali pada bab selanjutnya.

3.4.2 Menyelesaikan Masalah Serupa yang Lebih Sederhana

Seringkali masalah yang harus kita selesaikan terlihat rumit. Jika hal ini terjadi, kita dapat memulainya dengan menyederhanakan masalah tersebut. Berpikirlah, apakah yang membuat masalah tersebut terlihat rumit? Kemudian berusahalah menghilangkan kerumitan itu. Sebagai contoh, jika masalah tersebut melibatkan bilangan-bilangan yang besar, cobalah mulai dengan menjadikannya kecil dan mudah dihitung. Jika masalah tersebut melibatkan terlalu banyak variabel, cobalah mulai dengan menyelesaikan masalah serupa untuk beberapa variabel.

Jika masalah tersebut melibatkan bentuk-bentuk atau ekspresi aljabar yang rumit, cobalah mulai tanpa menghiraukan bentuk tersebut. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.2.1

Jika a, b, c, dan d bilangan-bilangan real antara 0 dan 1, buktikan bahwa

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d$$

Jawab

Jika kita pandang sekilas, terlihat bahwa hal yang membuat masalah ini terlihat rumit adalah banyaknya variabel. Kini kita akan mulai dengan menyelesaikan masalah serupa yang lebih sederhana, yaitu untuk dua variabel. Kita akan mencoba terlebih dahulu membuktikan bahwa

$$(1 - a)(1 - b) > 1 - a - b$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(1 - a)(1 - b) &= 1 - a - b + ab \\ &> 1 - a - b\end{aligned}$$

karena a dan b terletak di antara 0 dan 1, maka pastilah $ab > 0$. Jadi, kita telah mendapatkan hasil

$$(1 - a)(1 - b) > 1 - a - b$$

Kini hasil ini kita kembangkan dan arahkan ke hal yang kita inginkan, yaitu dengan menambahkan dua variabel lainnya. Jika kita kalikan kedua ruas pertidaksamaan ini dengan $(1 - c)$, maka kita memperoleh

$$\begin{aligned}(1 - a)(1 - b)(1 - c) &> (1 - a - b)(1 - c) \\ &= 1 - c - a + ac - b + bc \\ &= 1 - a - b - c + ac + bc \\ &> 1 - a - b - c\end{aligned}$$

karena $ac > 0$ dan $bc > 0$. Jadi, kini kita telah mendapatkan

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 1 - a - b - c$$

Terakhir, kita kalikan lagi kedua ruas pertidaksamaan ini dengan $(1 - d)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) &> (1 - a - b - c)(1 - d) \\ &= 1 - d - a + ad - b + bd - c + cd \\ &= 1 - a - b - c - d + ad + bd + cd \\ &> 1 - a - b - c - d\end{aligned}$$

karena $ad > 0$, $bd > 0$ dan $cd > 0$.

Jadi, terbukti bahwa

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$$

Soal

3.96 Untuk a, b, c, d bilangan real, buktikan bahwa jika

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$$

maka $a = b = c = d$.

3.97 Jika a, b, c, d bilangan-bilangan real positif, buktikan bahwa

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$$

3.4.3 Mendaftar Semua Kemungkinan yang Ada

Strategi yang lain adalah mendaftar semua kemungkinan yang ada. Strategi ini mudah dilakukan jika kemungkinan-kemungkinan tersebut relatif kecil banyaknya. Strategi mendaftar semua kemungkinan ini pernah kita lihat dalam bab dasar-dasar berhitung, dan memang biasanya muncul pada masalah berhitung. Pertanyaan yang menjadi masalah adalah berapa banyak kemungkinan-kemungkinan tersebut. Penting untuk kita perhatikan bahwa karena di sini kita mendaftar semua kemungkinan yang ada, hendaknya kita mendaftarnya secara sistematis, sehingga kita dapat memastikan bahwa tidak ada satupun kemungkinan yang belum ada dalam daftar kita. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.3.1

Ada berapa cara memperoleh jumlah uang sebesar Rp25.000,00 dengan menggunakan pecahan Rp10.000,00, Rp5.000,00, dan Rp1.000,00?

Jawab

Kita mencoba mendaftar semua cara yang ada secara sistematis.

Rp10.000,00	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
Rp5.000,00	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1
Rp1.000,00	25	20	15	10	5	0	15	10	5	0	5	0

Dari sini terlihat bahwa ada sebanyak 12 cara memperoleh jumlah uang tersebut.

Soal

3.98 Pada permainan panahan, terdapat tiga macam skor yang dapat diperoleh berdasarkan bagian target yang dikenai, yaitu 1, 5, dan 10. Jika suatu permainan terdiri dari tiga kali pemanahan, ada berapa banyak skor berbeda yang bisa diperoleh?

3.99 Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan

$$x^8 + y^8 < 10000$$

3.100 Berapa banyak bilangan asli kurang dari atau sama dengan 240 yang dapat dinyatakan sebagai jumlah dari satu atau lebih bilangan faktorial berbeda? Anggaplah 0! dan 1! berbeda.

Petunjuk : Luangkan waktu untuk menuliskan kombinasi-kombinasi jumlah dari 1 bilangan faktorial, 2 bilangan faktorial, 3 bilangan faktorial, 4 bilangan faktorial, 5 bilangan faktorial, dan 6 bilangan faktorial yang hasilnya kurang dari atau sama dengan 240. Bilangan-bilangan faktorial yang dimaksud tentu hanyalah 0!, 1!, 2!, 3!, 4!, dan 5!.

3.101 Bilangan 16 dapat dinyatakan dalam bentuk $3x + 7y$ sebab jika x diganti dengan 3 dan y diganti dengan 1 maka diperoleh $3 \times 3 + 7 \times 1$ yang bernilai 16. Dalam hal ini, x dan y adalah bilangan-bilangan bulat.

a. Berapa banyak bilangan asli kurang dari 10 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $2x + 5y$, dengan x dan y adalah bilangan-bilangan bulat?

b. Carilah tujuh buah bilangan antara 100 dan 122 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $6x + 9y$, dengan x dan y adalah bilangan-bilangan bulat.

3.102 Perhatikan persamaan kuadrat

$$4x^2 + 12x - c = 0$$

Ada berapa banyak nilai bilangan asli c yang kurang dari 100 sehingga akar-akar persamaan kuadrat ini merupakan bilangan rasional?

3.4.4 Mencoba Satu Demi Satu Kemungkinan Jawaban

Strategi ini mirip dengan strategi sebelumnya. Perbedaannya adalah dalam strategi ini, selain kita mendaftar kemungkinan-kemungkinan tersebut, kita membuang semua kemungkinan yang tidak memenuhi sampai kita menemukan satu kemungkinan yang merupakan jawaban dari permasalahan kita.

Strategi ini termasuk strategi yang sederhana dan mudah untuk dilakukan. Permasalahannya, tidak semua soal dapat kita selesaikan dengan strategi ini dengan mudah. Sama seperti strategi sebelumnya, strategi ini mudah kita lakukan jika kemungkinan-kemungkinan jawaban yang ada relatif kecil banyaknya. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.4.1

Tentukan bilangan asli terkecil $n > 1$, sehingga

$$\sqrt{1+2+3+\ldots+n}$$

merupakan bilangan bulat.

Jawab

Kita mencoba satu demi satu kemungkinan nilai n dengan $n > 1$, yang menyebabkan bentuk tersebut menghasilkan bilangan bulat.

n	Nilai $\sqrt{1+2+3+\ldots+n}$
2	$\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$
3	$\sqrt{1+2+3}=\sqrt{6}$
4	$\sqrt{1+2+3+4}=\sqrt{10}$
5	$\sqrt{1+2+3+4+5}=\sqrt{15}$
6	$\sqrt{1+2+3+4+5+6}=\sqrt{21}$
7	$\sqrt{1+2+3+4+5+6+7}=\sqrt{28}$
8	$\sqrt{1+2+3+4+5+6+7+8}=\sqrt{36}=6$

Jadi, bilangan asli terkecil $n > 1$ yang menyebabkan bentuk tersebut merupakan bilangan bulat adalah 8.

Contoh 3.4.4.2

Tentukan bilangan asli terkecil yang bersisa 1 jika dibagi 2, bersisa 2 jika dibagi 3, dan bersisa 3 jika dibagi 4.

Jawab

Tuliskan bilangan-bilangan asli yang bersisa 1 jika dibagi 2, yaitu

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$

Tuliskan juga bilangan-bilangan asli yang bersisa 2 jika dibagi 3, yaitu

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

Tuliskan juga bilangan-bilangan asli yang bersisa 3 jika dibagi 4, yaitu

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots$$

Kita harus mencari bilangan asli terkecil yang ada di ketiga barisan tersebut. Bilangan tersebut adalah 11.

Dalam kedua contoh di atas, hal yang membuat strategi ini berhasil adalah ternyata kita tidak perlu mencoba terlalu banyak kemungkinan untuk menemukan jawabannya, padahal sebenarnya kemungkinan-kemungkinan tersebut ada tak berhingga banyaknya. Kadangkala dengan memerhatikan suatu soal secara lebih cermat, kita dapat membatasi banyaknya kemungkinan-kemungkinan tersebut, sehingga kita tidak perlu mencoba terlalu banyak kemungkinan. Hal ini menjadi indikasi bagi kita bahwa strategi ini mungkin akan berhasil. Setelah kita membatasi banyaknya kemungkinan-kemungkinan, strategi ini menjadi sangat mudah dan efektif untuk digunakan. Perhatikanlah contoh lain berikut.

Contoh 3.4.4.3

Carilah suatu bilangan kuadrat sempurna yang digit-digitnya berturut-turut adalah k, $k + 1$, $k + 2$, $3k$, $k + 3$.

Jawab

Sekilas terlihat bahwa ada banyak kemungkinan bilangan kuadrat sempurna yang seperti ini. Tetapi jika kita perhatikan dengan lebih cermat, karena digit pertama adalah k, maka k tidak mungkin bernilai nol. Selain itu, karena bilangan ini juga mempunyai digit $3k$, maka nilai k yang mungkin hanyalah 1, 2, atau 3, sehingga kita hanya perlu menguji tiga bilangan, yaitu

$$12334 \qquad 23465 \qquad 34596$$

Karena $12334 = 2 \times 6167$, maka 12334 hanya mempunyai sebuah faktor 2, sehingga bukan bilangan kuadrat sempurna. Demikian pula, $23465 = 5 \times 4693$, maka 23465 hanya mempunyai sebuah faktor 5, sehingga bukan bilangan kuadrat sempurna. Jadi, bilangan yang dimaksud pastilah 34596. Dan ternyata, $34596 = 186^2$.

Dalam contoh di atas, hal yang membuat strategi ini mudah dan efektif untuk dilakukan adalah kita dapat melihat bahwa hanya ada tiga bilangan yang memenuhi. Berikut adalah contoh teka-teki menarik yang dapat diselesaikan dengan mencoba satu demi satu kemungkinan jawaban.

Contoh 3.4.4.4

Seorang petugas sensus mengetuk pintu sebuah rumah, dan menanyakan kepada seorang ibu di dalamnya tentang berapa banyak anak yang ia miliki dan berapa umurnya masing-masing.

"Saya memiliki tiga anak, umur mereka merupakan bilangan asli, dan hasil kali umur-umur mereka adalah 36," kata ibu itu.

"Maaf, informasi yang Ibu berikan kurang," jawab petugas sensus.

"Apabila saya memberitahumu jumlah umur mereka, kamu pasti masih bingung," kata ibu itu lagi.

"Saya ingin Ibu memberitahu saya sesuatu yang lain," kata petugas sensus.

"Baiklah. Anak tertua saya menyenangi anjing," kata ibu itu.

"Nah. Sekarang saya sudah mengetahui umur anak-anak Ibu masing-masing. Terima kasih," jawab petugas sensus itu.

Berapa umur ketiga anak tersebut?

Jawab

Pertama-tama, kita telah mengetahui bahwa umur-umur mereka merupakan bilangan asli dan hasil kalinya 36. Dari sini kita dapat menuliskan semua kemungkinan yang ada. Tabel berikut memperlihatkan semua kemungkinan yang ada disertai dengan jumlah umur untuk setiap kemungkinan tersebut.

(1,1,36)	(1,2,18)	(1,3,12)	(1,4,9)	(1,6,6)	(2,2,9)	(2,3,6)	(3,3,4)
38	21	16	14	13	13	11	10

Dengan memerhatikan tabel di atas, kita melihat bahwa perkataan si Ibu "Apabila saya memberitahumu jumlah umur mereka, kamu pasti masih bingung" menunjukkan bahwa jika jumlah umur mereka diketahui, masih terdapat lebih dari satu kemungkinan. Hal ini berarti jumlah umur mereka adalah 13, dan umur mereka masing-masing adalah (1,6,6) atau (2,2,9). Tetapi kita perhatikan bahwa ibu tersebut juga berkata "Anak tertua saya menyenangi anjing". Hal ini berarti ada anak tertua dalam keluarga itu. Jadi, kemungkinan umur (1,6,6) tidak memenuhi. Jadi, umur ketiga anak tersebut masing-masing adalah 2 tahun, 2 tahun, dan 9 tahun.

Soal

3.103 Tentukan bilangan asli terkecil $n > 1$, sehingga

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}$$

merupakan bilangan bulat.

Petunjuk : Bilangan asli terkecil n ini terletak di antara 20 dan 30.

3.104 Carilah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan tiga bilangan pangkat tiga dalam dua cara berbeda.

3.105 Carilah semua bilangan prima dua digit yang apabila kedua digitnya ditukar akan menghasilkan bilangan prima juga.

3.106 Tentukan bilangan asli terkecil yang bersisa 2 jika dibagi 3, bersisa 3 jika dibagi 4, dan bersisa 4 jika dibagi 5.

3.107 Carilah semua bilangan asli tiga digit yang merupakan hasil perkalian dari tiga bilangan asli berurutan dan merupakan satu kurangnya dari suatu bilangan kuadrat sempurna.

Petunjuk : Tuliskan bilangan-bilangan asli tiga digit yang merupakan hasil perkalian dari tiga bilangan asli berurutan. Tuliskan juga bilangan-bilangan asli tiga digit yang merupakan satu kurangnya dari suatu bilangan kuadrat sempurna.

3.108 Carilah suatu bilangan kuadrat sempurna yang terdiri dari empat angka (bilangan ribuan) dengan dua angka pertama sama, dan dua angka terakhir sama.

Petunjuk : Misal bilangan itu $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$, maka $100a + b$ harus habis dibagi 11. Karena $100a + b = 99a + (a + b)$ dan $99a$ habis dibagi 11, maka $a + b$ juga harus habis dibagi 11.

3.109 Setiap bilangan prima dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari beberapa bilangan prima berurutan. Tuliskan bilangan 2011 sebagai hasil penjumlahan dari 11 bilangan prima berurutan.

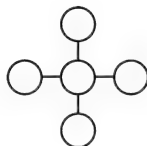
3.110 Misalkan diketahui bilangan 88, maka bentuklah bilangan yang merupakan hasil dari perkalian angka yang ada. Dalam hal ini adalah $8 \times 8 = 64$. Demikian seterusnya, sampai diperoleh bilangan yang terdiri dari satu angka. Dalam hal ini, $6 \times 4 = 24$, dan $2 \times 4 = 8$. Di sini kita berhenti. Dalam hal di atas, proses tersebut mempunyai panjang 4 karena mempunyai 4 suku.

a. Perlihatkan bahwa mulai dengan 53, maka proses mempunyai panjang 3.

b. Perlihatkan suatu contoh proses dengan panjang 2.

c. Carilah satu-satunya bilangan dua angka (bilangan puluhan) yang mempunyai panjang proses 5.

Petunjuk : Proses ini berakhir dengan 8.

3.111 Isilah lingkaran-lingkaran berikut dengan angka 1, 2, 3, 4, 5 sehingga jumlah setiap tiga bilangan secara vertikal maupun horisontal adalah sama.

Apakah terdapat lebih dari satu solusi?

3.112 Suatu ketika terdapat empat orang turis yang bernama Tuan Merah, Tuan Kuning, Tuan Biru, dan Tuan Hijau. Keempat turis ini memiliki kebiasaan yang unik, yaitu selalu mengenakan sepatu yang berwarna-warni. Pada hari itu mereka bertemu dan terjadi percakapan sebagai berikut. Tuan Merah berkata, "Hari ini kita mengenakan sepatu dengan warna merah, kuning, biru, dan hijau, tetapi tidak ada seorang pun dari kita yang memakai sepatu dengan warna yang sama dengan nama kita." Kemudian salah seorang di antaranya yang memakai sepatu kuning menjawab, "Wah, benar juga ya." Tuan Hijau menambahkan, "Sepatuku warna biru.". Tidak ada di antaranya yang berbohong. Sepatu warna apakah yang dipakai oleh Tuan Kuning?

3.113 Tiga orang tawanan mengetahui bahwa petugas penjara memiliki tiga topi putih dan dua topi merah. Petugas penjara ini meletakkan sebuah topi di kepala masing-masing tiga orang tawanan tersebut dan berkata, "Jika kamu dapat menebak warna topi yang terpakai di kepalamu, kamu akan dibebaskan dari penjara." Setiap tawanan dapat melihat warna topi yang dipakai oleh dua tawanan yang lain tetapi tidak dapat melihat warna topi yang dipakainya sendiri. Tawanan pertama berkata, "Aku tidak dapat menebak warna topiku." Kemudian tawanan kedua berkata, "Aku tidak dapat menebak warna topiku." Tawanan ketiga yang ternyata buta, kini dapat menentukan warna topi yang terpakai di kepalanya dan dibebaskan dari penjara. Apakah warna topi yang terpakai di kepala tawanan ketiga ini, dan jelaskan bagaimana ia dapat menemukannya.

3.114 Terdapat 13 kartu bernomor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, dan 13 dibagikan kepada Emy, Paulus, Dewi, dan Condro yang masing-masing mendapatkan tiga kartu, dengan satu kartu tersisa. Hasil penjumlahan dari nomor-nomor kartu yang diterima oleh masing-masing anak tersebut adalah sama. Kartu terkecil Emy bernomor 1, kartu terkecil Paulus bernomor 3, dan kartu terbesar Dewi bernomor 11. Tentukan nomor kartu Condro yang nilainya di tengah di antara tiga kartu yang dimilikinya.

3.4.5 Membagi Masalah Menjadi Beberapa Kasus

Kadangkala suatu masalah terasa rumit untuk diselesaikan hanya dalam satu langkah. Ketika ini terjadi, kita dapat menyederhanakan masalah tersebut dengan membaginya menjadi beberapa kasus, lalu menyelesaikan masing-masing kasus tersebut secara terpisah. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.5.1

Bilangan polindrom adalah bilangan asli yang terbaca sama dari kiri ke kanan dan dari kanan ke kiri, contohnya 1, 33, 525, dan sebagainya. Tentukan banyaknya bilangan polindrom dari 1 hingga 999.

Jawab

Kita dapat menyederhanakan masalah ini dengan menghitung banyaknya bilangan polindrom satu digit, dua digit, dan tiga digit secara terpisah.

(1) Dari 1 hingga 9,

Ada sebanyak 9 bilangan polindrom, sebab semua bilangan tersebut merupakan bilangan polindrom.

(2) Dari 10 hingga 99,

Bilangan-bilangan polindrom dari 10 hingga 99 adalah:

$$11, 22, 33, \ldots, 99$$

Jadi, ada sebanyak 9 bilangan polindrom.

(3) Dari 100 hingga 999,

Bilangan-bilangan polindrom dari 100 hingga 999 adalah:

$$\begin{array}{ccccc} 101 & 202 & 303 & \ldots & 909 \\ 111 & 212 & 313 & \ldots & 919 \\ 121 & 222 & 323 & \ldots & 929 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 191 & 292 & 393 & \ldots & 999 \end{array}$$

Jadi, ada sebanyak $10 \times 9 = 90$ bilangan polindrom.

Jadi, dari 1 hingga 999 terdapat sebanyak

$$9 + 9 + 90 = 108$$

bilangan polindrom.

Soal

3.115 Setiap bilangan asli dari 1 hingga 2011 dibagi 7. Tentukan hasil penjumlahan dari sisa pembagian bilangan-bilangan tersebut.

3.116 Tentukan banyaknya bilangan asli empat digit n sehingga n dan $2n$ keduanya merupakan bilangan polindrom.

3.117 Berapa banyak bilangan asli tiga digit yang memiliki sifat digit kedua merupakan rata-rata dari digit pertama dan ketiga?

3.118 Seseorang mengetik bilangan-bilangan asli 1, 2, 3, 4, ..., 2011 dengan mesin ketik. Berapa kali ia mengetik angka nol?

3.119 Perhatikan barisan naik dari bilangan-bilangan bulat positif yang tidak mempunyai digit 0, yaitu

$$1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 11, 12, \ldots$$

Tentukan bilangan ke-2011 dari barisan ini.

3.120 Berapa digit yang digunakan untuk memberi nomor 100 orang peserta suatu perlombaan lari marathon dengan nomor 1, 2, 3, ..., 100?

3.121 Total banyaknya digit dari nomor-nomor halaman pada suatu buku adalah 3.189. Berapa banyak halaman buku tersebut?

3.122 Berapa banyak bilangan asli kurang dari 1000 yang memiliki paling sedikit dua digit berurutan yang sama? Sebagai contoh, 11, 422, 556, 777, dan sebagainya.

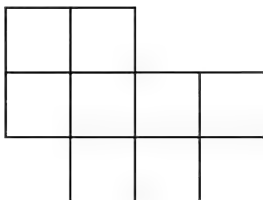
3.123 Berapa banyak bilangan asli kurang dari 1000 yang memiliki sifat semua digitnya lebih dari atau sama dengan digit sebelumnya? Sebagai contoh, 148 memiliki sifat ini, tetapi 184 tidak memiliki sifat ini.

3.124 Perhatikanlah gambar berikut.

Tentukan banyaknya segitiga yang ada pada gambar di atas dengan melengkapi tabel berikut.

Ukuran Segitiga	Banyaknya Segitiga yang Menghadap ke		Jumlah
	Atas	Bawah	
1 – 1 – 1	...	...	...
2 – 2 – 2	...	...	...
3 – 3 – 3	...	...	...
Total			...

3.125 Berapa banyak segiempat (persegi dan persegi panjang) yang terbentuk dari tabel berukuran 3×3?

3.126 Berapa banyak segiempat (persegi dan persegi panjang) yang ada pada gambar berikut?

3.4.6 Memandang Masalah dengan Cara Lain

Ketika kita merasa bahwa masalah yang kita hadapi sulit untuk diselesaikan, strategi yang lain adalah dengan mencoba memandang masalah tersebut dengan cara berbeda. Hal ini kita lakukan agar kita tidak hanya terpaku pada metode-metode yang biasa saja, tetapi kita mencoba menemukan cara lain dalam perspektif yang berbeda.

Kita telah membahas tentang berpikir kreatif dalam bab pertama. Jika kita terus menerus terpaku dengan metode-metode yang sudah ada, kita akan sulit mengasah kemampuan kita untuk berpikir kreatif. Berikut akan diberikan suatu ilustrasi.

Suatu eksperimen pernah dilakukan di Jerman dengan menggunakan seekor simpanse dengan tujuan mengamati bagaimana seekor simpanse memecahkan suatu masalah. Disiapkan sebuah tabung reaksi tipis yang panjang. Ke dalamnya dimasukkan sebutir kacang yang disenangi simpanse tersebut. Tabung reaksi ini kemudian diletakkan dalam keadaan tegak pada bagian sudut kandang simpanse agar tidak terjatuh. Peneliti ingin menguji apakah simpanse ini dapat mengambil kacang yang terdapat di dasar tabung kaca tipis yang dalam itu.

Mula-mula karena melihat kacang kesenangannya, simpanse tersebut mendekat. Ia berusaha memasukkan tangannya ke dalam tabung itu untuk mengambil kacang tersebut, namun tentu tidak berhasil sebab tabung tersebut terlalu dalam. Sejenak ia berpikir sambil terus berusaha memasukkan jarinya. Kemudian karena usahanya tidak berhasil, simpanse ini mencoba cara lain. Ia berjalan ke tempat minumnya, memasukkan air ke dalam mulutnya kemudian kembali ke tabung tadi. Air yang ada di dalam mulutnya dikeluarkannya untuk mengisi tabung tersebut. Hal ini dilakukannya berulang-ulang hingga kacang yang tadinya terdapat di dasar tabung menjadi terapung dan mudah diambilnya.

Ilustrasi ini menunjukkan bagaimana kita memandang suatu masalah dengan cara lain. Dalam memecahkan masalah matematika pun diperlukan pemikiran seperti ini. Perhatikanlah dua contoh berikut.

Contoh 3.4.6.1

Hitunglah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Jawab

Metode yang biasa saja adalah dengan menjumlahkannya satu demi satu dari kiri ke kanan, yakni 1 ditambahkan dengan 2, lalu hasilnya ditambahkan dengan 3, dan seterusnya. Namun ini tentu saja sangat merepotkan dan membutuhkan waktu lama.

Cobalah memandang hal ini dengan cara lain. Perhatikanlah bahwa bentuk penjumlahan ini dapat kita pandang sebagai

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$

$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{\text{sebanyak } 50}$

$= 50 \times 101$

$= 5050$

Pengembangan dari metode menghitung jumlah pada contoh 3.4.6.1 adalah *teknik penjumlahan Gauss*, yang akan dibahas pada bab barisan dan deret. Berikut adalah contoh-contoh yang lain.

Contoh 3.4.6.2

Selesaikanlah sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} 2a + b + c + d + e = 1 \\ a + 2b + c + d + e = 4 \\ a + b + 2c + d + e = -2 \\ a + b + c + 2d + e = 6 \\ a + b + c + d + 2e = 3 \end{cases}$$

Jawab

Metode yang biasa saja adalah dengan melakukan eliminasi atau sub-

stitusi satu demi satu variabel hingga dalam suatu persamaan hanya tersisa satu variabel, kemudian melakukan substitusi mundur (*backward substitution*) untuk memperoleh variabel-variabel yang lain. Namun ini begitu merepotkan, sebab terdapat lima variabel, yang berarti kita harus mengeliminasi empat variabel untuk menemukan nilai dari salah satu variabel.

Cobalah menyelesaikan dengan cara yang lain. Perhatikanlah bahwa bentuk dari setiap persamaan di atas istimewa, yaitu terlihat simetris. Lebih lanjut, bila kita jumlahkan semua persamaan tersebut, kita memperoleh

$$6a + 6b + 6c + 6d + 6e = 12$$

Dengan membagi kedua ruas dengan 6 diperoleh

$$a + b + c + d + e = 2$$

Dan bila kita kurangkan persamaan baru ini dengan setiap persamaan di atas, berturut-turut kita akan memperoleh nilai $a = -1$, $b = 2$, $c = -4$, $d = 4$, dan $e = 1$.

Contoh 3.4.6.3

Seseorang menyusuri sungai dengan sebuah perahu dengan arah melawan arus air. Tanpa disadarinya, topinya terjatuh ke sungai. Satu jam kemudian barulah ia menyadari bahwa topinya telah jatuh ke sungai, maka ia berbalik dan menyusuri sungai itu searah dengan arus air, sampai ia mendapati topinya pada jarak 4 Km dari tempat di mana topinya terjatuh. Berapakah kecepatan arus sungai?

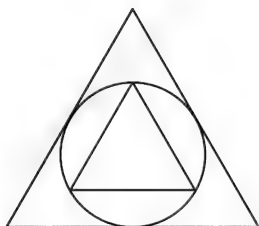
Jawab

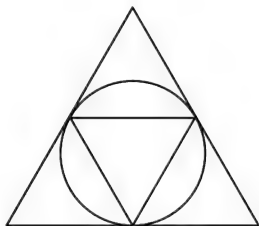
Kita merasa lebih terbiasa menyelesaikan ini dengan memerhatikan pergerakan perahu, topi, dan arus air menurut pengamat yang sedang diam. Namun, kita dapat pula memandang dengan cara yang lain, yaitu kita memerhatikan pergerakan tersebut menurut topi sebagai pengamatnya. Karena kecepatan dan arah arus air sama dengan kecepatan dan arah pergerakan topi tersebut, maka menurut topi tersebut air tidak bergerak. Oleh karena itu, dengan mengubah sudut pandang kita sebagai topi, kita tidak perlu memperhitungkan kecepatan arus air.

Jadi, mula-mula perahu tersebut bergerak menjauhi topi dalam waktu 1 jam dengan kecepatan tertentu, kemudian bergerak mendekati topi dengan kecepatan yang sama. Oleh sebab itu, waktu yang diperlukan perahu untuk bergerak mendekati topi sama dengan waktu yang diperlukannya untuk menjauhi topi, yaitu 1 jam. Maka, keseluruhan pergerakan perahu ini memerlukan waktu 2 jam. Dan selama dua jam itu pula, menurut pengamat yang sedang diam, topi tersebut menempuh jarak 4 Km. Jadi, kecepatan arus air adalah

$$\frac{4}{2} = 2 \text{ Km per jam}$$

Contoh 3.4.6.4

Pada gambar berikut, sebuah lingkaran menjadi lingkaran dalam bagi segitiga sama sisi besar dan menjadi lingkaran luar bagi segitiga sama sisi kecil. Hitunglah perbandingan luas dari kedua segitiga sama sisi tersebut.

Jawab

Kita dapat menyelesaikan permasalahan ini dengan cara biasa, yaitu dengan menganalisis secara geometrik. Namun ini tentu saja panjang dan memerlukan waktu lama. Kita dapat memandang dengan cara lain, yaitu dengan membalik segitiga kecil, sehingga kita memperoleh:

Dari gambar kita ini jelas terlihat bahwa luas segitiga kecil adalah seperempat dari luas segitiga besar. Jadi, perbandingan luas kedua segitiga tersebut adalah 1 : 4.

Soal

3.127 Hitunglah $1 + 3 + 5 + \dots + 999$ dengan cara sebagai berikut.

a. Hitunglah

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000$$

dengan menggunakan teknik seperti pada contoh 3.4.6.1.

b. Hitunglah

$$2 + 4 + 6 + \dots + 1000$$

dengan memerhatikan bahwa

$$2 + 4 + 6 + \dots + 1000 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 500)$$

menggunakan teknik yang sama.

c. Perhatikanlah bahwa

$$1 + 3 + 5 + \dots + 999 = (1 + 2 + 3 + \dots + 1000) - (2 + 4 + 6 + \dots + 1000)$$

3.128 Kita telah memperoleh dari contoh 3.4.6.1 bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$$

Gunakanlah hasil ini untuk menentukan jumlah dari:

a. $2 + 3 + 4 + \dots + 101$

b. $2 + 4 + 6 + \dots + 200$

c. $1 + 3 + 5 + \dots + 199$

d. $3 + 6 + 9 + \dots + 300$

e. $4 + 7 + 10 + \dots + 301$

f. $1 + 2 + 3 + \dots + 200$

3.129 Isilah bagian kosong untuk meneruskan pola berikut.

$$1 = 1$$
$$1 + 2 + 1 = 4$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$$

.... = ...

.... = ...

a. Hitunglah jumlah bilangan berikut.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

b. Hitunglah jumlah bilangan berikut.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

3.130 Sederhanakan hasil perkalian

$$(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1)\ldots(3^{2^n} + 1)$$

Petunjuk : Kalikan dengan $\dfrac{(3^{2^0} - 1)}{(3^{2^0} - 1)}$ dari depan.

3.131 Carilah nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 627x + 373y = 3508 \\ 373x + 627y = 2492 \end{cases}$$

3.132 Selesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \\ 5x + 3y + 7v + u = -16 \end{cases}$$

3.133 Selesaikanlah sistem persamaan

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 9 \end{cases}$$

3.134 Diberikan sepuluh bilangan berbeda sedemikian hingga jika setiap sembilan bilangan dijumlahkan menghasilkan berturut-turut 72, 71, 69, 68, 66, 65, 64, 62, 61, dan 59.

a. Tentukan jumlah kesepuluh bilangan tersebut.

b. Tentukan kesepuluh bilangan tersebut.

3.135 Jika $x_1, x_2, \ldots, x_7$ adalah bilangan-bilangan real sehingga

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123 \end{cases}$$

Hitunglah nilai

$$S = 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$$

a. Sulit untuk melakukan eliminasi dan substitusi untuk mendapatkan nilai ini. Kita akan menyelesaikan dengan cara lain. Kita akan mencoba menyatakan S sebagai kombinasi dari ruas kiri setiap persamaan yang diberikan. Oleh karena itu, perhatikan bahwa kita perlu menentukan nilai a, b, c sehingga

$$an^2 + b(n + 1)^2 + c(n + 2)^2 = (n + 3)^2$$

Kelompokkan menurut suku-sukunya kemudian dapatkan tiga persamaan dalam a, b, c.

b. Carilah nilai a, b, c dari ketiga persamaan tersebut.

c. Carilah nilai S dari a kali persamaan pertama ditambah b kali persamaan kedua ditambah c kali persamaan ketiga.

3.136 Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

a. Cara mencoba-coba atau menebak kurang efektif. Kita akan menyelesaikan dengan cara lain.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan

$$x = 2 + p$$

$$y = 2 + q$$

dengan p dan q bilangan-bilangan bulat.

Substitusikan ke persamaan tersebut kemudian sederhanakan.

b. Tulislah semua kemungkinan nilai bilangan bulat p dan q yang memenuhi persamaan tersebut (dapat dilakukan dengan membuat tabel perkalian).

c. Setiap kemungkinan nilai p dan q memberikan pasangan (x, y). Perhatikan bahwa ada satu pasangan yang tidak memenuhi. Buatlah kesimpulan.

3.137 Dengan teknik seperti pada soal sebelumnya, carilah sebuah persamaan sederhana yang harus dipenuhi untuk x dan y yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

untuk sembarang bilangan bulat n.

3.138 Faktorkan

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$$

dengan cara sebagai berikut.

a. Tuliskan bentuk ini sebagai

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-3$$

Kalikan masing-masing bentuk dalam kurung siku kemudian misalkan

$$y = x^2 + 5x$$

b. Faktorkan dalam y kemudian nyatakan kembali dalam x.

3.139 Dengan teknik pemfaktoran seperti pada soal sebelumnya, carilah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 48$$

3.140 Carilah semua pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi persamaan

$$xy + x + y = 5$$

dengan cara sebagai berikut.

a. Tambahkan kedua ruas dengan 1 kemudian perhatikan bahwa ruas kiri dapat difaktorkan, menjadi

$$(x + 1)(y + 1) = 6$$

b. Tulislah semua kemungkinan pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi persamaan tersebut.

3.141 Dengan teknik seperti soal sebelumnya, carilah semua tripel bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi persamaan

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 29$$

3.142 Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b + c = 28 \\ ab + bc + ac = 252 \\ abc = 720 \end{cases}$$

3.143 Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 53 \\ abc = 24 \end{cases}$$

3.144 Tentukan semua faktor prima dari bilangan 1027.
Petunjuk : Tuliskan $1027 = 10^3 + 3^3$.

3.145 Bilangan 5 dapat kita tuliskan sebagai jumlah dari 3 bilangan asli dengan memerhatikan urutan dalam 6 cara, yaitu

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 1 + 3 \\ &= 1 + 3 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 1 + 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 2 \\ &= 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Misalkan m dan n merupakan bilangan asli sehingga $m \leq n$. Dalam berapa cara n dapat dituliskan sebagai jumlah dari sebanyak m bilangan asli dengan memerhatikan urutan?

Petunjuk : Tuliskan n sebagai jumlah dari n angka 1, yaitu:

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n}$$

Pandanglah masalah ini sebagai banyaknya cara memilih $m - 1$ tanda "+" dari sebanyak $n - 1$ tanda "+" yang ada. Nyatakan dalam bentuk kombinasi.

3.146 Sebuah ruangan berbentuk kotak, keempat dindingnya memiliki tinggi 4 meter dan alasnya berupa persegi berukuran 5 meter × 5 meter. Seekor semut sedang berada di salah satu dinding dengan posisi 1 meter dari atap dan 1 meter dari dinding kedua. Semut ini ingin berjalan menuju dinding ketiga di hadapannya menuju titik yang terletak 1 meter dari lantai dan 1 meter dari dinding keempat. Tentukan jarak terpendek yang dapat ditempuh semut ini.

Petunjuk : Pandanglah ruangan ini sebagai balok yang dapat dibuka membentuk sebuah jaring-jaring balok dalam dimensi dua.

3.147 Untuk nilai a yang bagaimanakah sistem persamaan

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

berturut-turut memiliki tepat nol, dua, dan empat solusi?

Petunjuk : Pikirkan suatu masalah geometri yang ekuivalen.

Strategi ini dapat pula kita terapkan dalam kalkulus, khususnya ketika kita berhadapan dengan integral yang sulit untuk diselesaikan. Para pembaca yang sudah mempelajari kalkulus dapat memerhatikan contoh berikut sebagai ilustrasi.

Contoh 3.4.6.5

Selesaikan integral berikut.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}}$$

Jawab

Sebelum kita mencoba strategi, ada baiknya kita berpikir sejenak. Jika dikerjakan langsung, sebagian besar dari kita mungkin memilih strategi substitusi trigonometri sebagai percobaan pertama. Tetapi untuk itu, kita perlu mengubah bentuk di dalam tanda akar menjadi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

kemudian menggunakan penggantian

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sec t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sec t$$

sehingga

$$dx = \frac{1}{2}\sec t \tan t \; dt$$

Tetapi ternyata penggantian ini menimbulkan masalah baru, yaitu

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec t \tan t}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sec t\right)\frac{1}{2}\tan t} dt = 2\int \frac{\sec t}{1 + \sec t} dt = 2\int \frac{dt}{1 + \cos t}$$

Untuk mengerjakan integral ini kita memerlukan identitas trigonometri

$$1 + \cos t = 2\cos^2 \frac{1}{2}t$$

sehingga diperoleh bahwa integral tersebut sama dengan

$$2\int \frac{dt}{1 + \cos t} = 2\int \frac{dt}{2\cos^2 \frac{1}{2}t} = \int \sec^2 \frac{1}{2}t \; dt = 2\tan\frac{1}{2}t + C$$

Sekarang kita kembalikan dalam variabel semula, sehingga diperoleh

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - x}} + C$$

Cara di atas terlihat panjang dan membutuhkan cukup banyak waktu. Tetapi kita dapat menyiasati penghitungan integral ini dengan cara lain, yaitu dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut dengan $\frac{1}{x^2}$ sehingga diperoleh

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \int \frac{\frac{1}{x^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

yang dapat kita selesaikan dengan mudah jika disubstitusikan

$$u = 1 - \frac{1}{x}$$

sehingga

$$du = \frac{1}{x^2} dx$$

Jadi, integral tersebut sama dengan

$$\int \frac{\frac{1}{x^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + C$$

Para pembaca dapat memeriksa bahwa hasil yang diperoleh adalah sama.

Soal

3.148 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Selesaikan

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

Petunjuk : Kalikan pembilang dan penyebut dengan x, lalu gunakan metode substitusi trigonometri $x^2 = \sec t$, sehingga $2x\, dx = \sec t \tan t\, dt$.

3.149 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Selesaikan

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^2\sqrt{x^4 - 1}} dx$$

Petunjuk : Kalikan pembilang dan penyebut dengan $\frac{1}{x^3}$, lalu gunakan metode substitusi.

3.150 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Selesaikan

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}} dx$$

3.151 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Selesaikan

$$\int \frac{x^3 - x - 2}{x^2\sqrt{x^3 + x + 1}} dx$$

3.4.7 Bekerja Mundur

Seperti halnya pembuktian, strategi lain yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah adalah dengan bekerja mundur. Perhatikanlah kedua contoh berikut.

Contoh 3.4.7.1

Seseorang sedang membelanjakan uangnya. Mula-mula ia membelanjakan seperempat dari uangnya, kemudian ia membelanjakan Rp3.000,00, kemudian membelanjakan lagi dua pertiga dari sisanya. Jika uangnya sekarang adalah Rp6.000,00, berapakah uangnya mula-mula?

Jawab

Kita mulai dari Rp6.000,00 tersebut, yang merupakan sepertiga dari uangnya, maka sebelum ia membelanjakan dua pertiga dari sisanya, uangnya adalah

$$\frac{3}{1} \times \text{Rp}6.000{,}00 = \text{Rp}18.000{,}00$$

Sebelum dibelanjakan Rp3.000,00, uangnya adalah

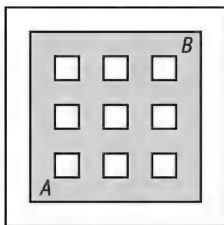
$$\text{Rp}18.000{,}00 + \text{Rp}3.000{,}00 = \text{Rp}21.000{,}00$$

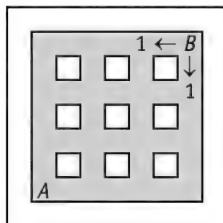
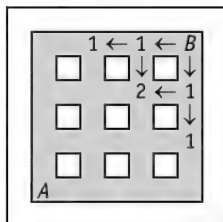
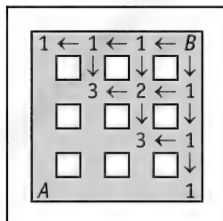
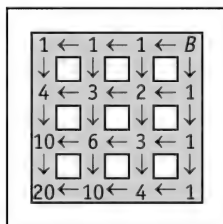
Ini adalah tiga perempat dari uangnya mula-mula. Maka uangnya mula-mula adalah

$$\frac{4}{3} \times \text{Rp}21.000{,}00 = \text{Rp}28.000{,}00$$

Jadi, uangnya mula-mula adalah Rp28.000,00.

Contoh 3.4.7.2

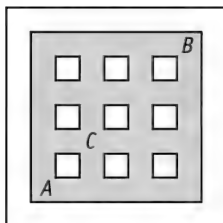
Pada gambar berikut, tentukanlah banyaknya cara untuk mencapai *B* dari *A*, jika hanya diperbolehkan bergerak ke atas dan ke kanan.

Jawab

Kita mencoba menghitung mulai dari tujuannya, yaitu *B*.

Selanjutnya adalah

Demikianlah seterusnya.

Akhirnya diperoleh

Jadi, ada 20 cara untuk mencapai *B* dari *A*.

Soal

3.152 Di suatu kompetisi tari, mula-mula semua kontestan menari bersama. Setelah tiga menit, separuh dari para kontestan tereliminasi. Setelah sepuluh menit berikutnya, separuh dari sisanya tereliminasi. Setelah menit ke-15, separuh lagi dari sisanya tereliminasi, dan saat menit ke-20, separuh lagi dari sisanya tereliminasi. Pada dua menit terakhir, ada satu orang kontestan lagi tereliminasi, dan menyisakan satu orang yang merupakan pemenang dari kompetisi tari itu. Berapa banyak kontestan mula-mula?

3.153 Sebuah mobil mengalami penurunan harga sebagai berikut. Pada awalnya, seseorang membeli mobil ini dengan potongan harga 20%. Setelah lama dipakainya, mobil ini dijual dengan harga 60% dari harga belinya. Seseorang lain membeli mobil bekas tersebut dijual kembali dengan harga yang diturunkan 10% per tahun. Setelah 2 tahun, mobil ini terjual seharga Rp24.300.000,00. Tentukan harga awal mobil ini.

3.154 Tentukanlah banyak cara untuk mencapai B dari A tanpa melalui C, jika hanya diperbolehkan bergerak ke atas dan ke kanan.

3.155 Tanpa menggunakan alat bantu hitung, tentukan manakah yang lebih besar, $\sqrt[9]{9!}$ atau $\sqrt[10]{10!}$.

3.4.8 Menggunakan Variabel

Sejak SMP kita telah diperkenalkan bentuk aljabar untuk menyelesaikan berbagai permasalahan. Strategi yang digunakan adalah memisalkan nilai komponen yang ingin dicari sebagai suatu variabel. Hal ini se-

ring kita gunakan jika informasi yang tertulis dalam soal sulit kita pahami secara langsung. Dengan menggunakan variabel untuk merepresentasikan suatu komponen yang terdapat dalam soal, komponen tersebut menjadi mudah untuk kita operasikan dan temukan nilainya. Dalam soal cerita, permasalahannya hanya bagaimana kita membuat model matematika dari soal tersebut. Sebagai contoh pertama, kita akan menyelesaikan soal pada contoh 3.4.7.1 dengan menggunakan variabel.

Contoh 3.4.8.1

Seseorang sedang membelanjakan uangnya. Mula-mula ia membelanjakan seperempat dari uangnya, kemudian ia membelanjakan Rp3.000,00, kemudian membelanjakan lagi dua pertiga dari sisanya. Jika uangnya sekarang adalah Rp6.000,00, berapakah uangnya mula-mula?

Jawab

Sebelumnya kita telah mencoba strategi bekerja mundur untuk menyelesaikan permasalahan ini. Kini marilah kita menyelesaikannya dengan menggunakan variabel. Pertama-tama, kita misalkan uangnya mula-mula adalah x rupiah. Kemudian kita operasikan sesuai yang tertera pada soal. Mula-mula ia membelanjakan seperempat dari uangnya, maka uangnya sekarang adalah

$$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$$

Kemudian ia membelanjakan Rp3.000,00, maka uangnya sekarang adalah

$$\frac{3}{4}x - 3000$$

Kemudian ia membelanjakan lagi dua pertiga dari sisanya, maka uangnya sekarang adalah

$$\frac{3}{4}x - 3000 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x - 3000\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x - 3000\right)$$

Diketahui bahwa sisa uangnya sekarang adalah Rp6.000,00, maka kita memperoleh persamaan

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x - 3000\right) = 6000$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x - 1000 = 6000$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x = 7000$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 28000$$

Jadi, uangnya mula-mula adalah Rp28.000,00.

Soal

3.156 Seseorang berkata bahwa ia telah menghabiskan seperempat hidupnya ketika ia masih anak-anak, seperlima hidupnya ketika ia remaja, sepertiga hidupnya ketika ia dewasa, dan 13 tahun sisanya ketika ia berusia lanjut. Berapa umurnya ketika ia meninggal?

Contoh 3.4.8.2

Hitunglah nilai dari

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}$$

Jawab

Nilai dari bentuk ini sulit kita tentukan secara langsung, maka kita menggunakan variabel untuk merepresentasikannya. Misalkan

$$x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}$$

Jika kita kuadratkan kedua ruas, kita memperoleh

$$x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2(x)$$

dan karena $x \neq 0$, maka didapatkan

$$x = 2$$

Soal

3.157 Hitunglah nilai dari:

a. $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

3.158 Hitunglah nilai x yang memenuhi persamaan

$$(6x+28)^{\frac{1}{3}}-(6x-28)^{\frac{1}{3}}=2$$

3.159 a. Hitunglah

$$\sqrt[3]{25\sqrt[3]{25\sqrt[3]{25\sqrt[3]{\dots}}}}$$

b. Gunakan teknik yang sama untuk menyederhanakan bentuk

$$\sqrt[k]{n\sqrt[k]{n\sqrt[k]{n\sqrt[k]{\dots}}}}$$

3.160 Hitunglah

a. $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{\dots}}}}$

b. $1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\dots}}}$

3.161 Hitunglah

$$\sqrt{\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{\dots}}}+\sqrt{\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{\dots}}}+\sqrt{\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{\dots}}}+\sqrt{\dots}}}}$$

3.162 a. Misalkan

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$$

Nyatakanlah

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\dots$$

dalam S, lalu hitunglah

$$\frac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots}{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots}$$

b. Dengan cara yang sama, hitunglah pula

$$\frac{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots}{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}+\ldots}$$

c. Untuk $p > 1$, hitunglah

$$\frac{\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots}{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{8^p}+\ldots}$$

Sebagai tambahan pengetahuan, para pembaca yang sudah mempelajari kalkulus dapat memerhatikan satu contoh lain berikut.

Contoh 3.4.8.2

Hitunglah nilai dari

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

tanpa menggunakan teorema L'Hôspital.

Jawab

Sebenarnya dengan teorema L'Hôspital kita dapat mengerjakan limit ini dengan mudah. Namun, fokus pembahasan kita di sini adalah bagaimana kita menerapkan strategi menggunakan variabel untuk mengerjakan limit ini.

Kita misalkan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = L$$

Kemudian kita perhatikan bahwa nilai dari limit tersebut sama saja dengan nilai dari

$$L = \lim_{2x\to 0}\frac{\tan 2x - 2x}{(2x)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x - 2x}{8x^3}$$

Sekarang kita perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x - 2x}{8x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2x}{8x^3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad L = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x - 2x + 2x\tan^2 x}{8x^3(1-\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan^2 x}\left(\frac{1}{4}\times\frac{\tan x - x}{x^3} + \frac{\tan^2 x}{4x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan^2 x}\right)\left(\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{4x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad L = \left(\frac{1}{1-0}\right)\left(\frac{1}{4}L + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3L = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad L = \frac{1}{3}$$

Jadi, nilai dari limit tersebut adalah

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Mengerjakan limit dengan cara di atas ada kelemahannya. Pemisalan bahwa hasil dari limit tersebut adalah L dan manipulasi sebagaimana yang telah dilakukan di atas sebenarnya hanya dapat dilakukan dengan asumsi bahwa limit tersebut ada dan berhingga. Dalam mengerjakan soal-soal berikut kita asumsikan demikian.

Soal

3.163 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Hitunglah nilai dari

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$$

Petunjuk : Tinjau $\lim_{3x\to 0}\frac{3x - \sin 3x}{(3x)^3}$ dan gunakan $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

3.164 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus***)

Hitunglah nilai dari

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

Petunjuk : Tinjau $\lim_{2x \to 0} \frac{(2x)^2 - \sin^2 2x}{(2x)^2 \sin^2 2x}$ dan gunakan $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ dan $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

3.165 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus***)

Hitunglah nilai dari

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Petunjuk : Tinjau $\lim_{(-x) \to 0} \left[\frac{1}{(-x)} - \frac{1}{e^{-x} - 1} \right]$.

Masalah-masalah berikut merupakan masalah sistem persamaan linear dua variabel. Masalah-masalah berikut bukan melatih bagaimana kita menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, melainkan hal yang terpenting adalah bagaimana kita dapat membuat model matematikanya. Setiap masalah melibatkan dua variabel dan dua persamaan.

3.166 Akan dilakukan pembagian sejumlah beras kepada setiap keluarga dalam sebuah kecamatan. Jika tiap keluarga diberi 10 Kg, maka beras tersisa sebanyak 15 Kg. Sedangkan jika tiap keluarga diberi 15 Kg, maka akan ada satu keluarga yang hanya mendapat 10 Kg dan ada satu keluarga lain yang tidak mendapat bagian. Berapa banyak keluarga yang ada?

3.167 Setumpuk kartu dibagikan kepada Handi dan Surya tidak sama banyak. Jika seperlima dari kartu Handi diberikan kepada Surya, maka banyaknya kartu Surya menjadi 12 kurangnya dari tiga kali banyaknya kartu Handi. Jika setelah itu Surya memberikan seperempat kartunya kepada Handi, maka kartu-kartu mereka menjadi sama banyak. Berapa banyaknya kartu semula?

3.168 Dalam sebuah keluarga, setiap anak pria memiliki saudara sebanyak saudarinya dan setiap anak wanita memiliki saudari sebanyak lima perenam saudaranya. Berapa banyak anak dalam keluarga itu?

3.169 Sebuah kotak berisi bola merah dan hijau. Jika 4 bola merah dikeluarkan dari kotak maka sepersepuluh sisanya adalah bola merah. Akan tetapi jika 4 bola hijau dikeluarkan maka seperlima sisanya adalah bola merah. Tentukan banyaknya bola merah dan hijau di kotak tersebut.

3.170 Sejumlah pohon hendak ditanam dalam beberapa baris, dengan setiap barisnya memiliki jumlah pohon yang sama. Apabila pada setiap baris jumlah yang direncanakan itu ditambah dengan 6 batang pohon, maka jumlah barisnya akan berkurang 10 baris, sedangkan apabila pada setiap baris hanya ditambahkan 3 batang pohon, maka jumlah baris itu hanya akan berkurang 6 baris. Berapa banyak pohon yang akan ditanam?

3.171 Antara pukul 15.00 dan 16.00, pada pukul berapakah jarum jam dan jarum menit pada sebuah arloji akan berimpit?

3.4.9 Menggunakan Prinsip Paritas

Salah satu ilustrasi untuk menjelaskan paritas adalah papan catur. Di antara bidak-bidak catur yaitu raja, ratu, menteri, kuda, benteng, dan prajurit, dua di antaranya memiliki sifat yang istimewa, yaitu menteri dan kuda. Pergerakan menteri yang selalu diagonal mengakibatkan dari awal hingga akhir, menteri hanya bergerak di petak papan catur yang berwarna sama. Ini menjadi suatu keistimewaan dari menteri, sebab ia selalu berada pada petak dengan paritas yang sama. Lain halnya dengan kuda, yang hanya dapat bergerak membentuk huruf "L". Pergerakan kuda semacam ini mengakibatkan ia selalu berpindah paritas dalam setiap pergerakannya.

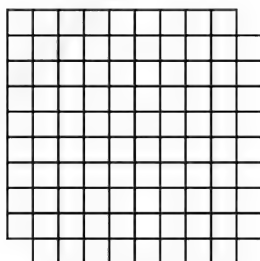
Dalam matematika, dua buah bilangan bulat dikatakan memiliki paritas yang sama jika keduanya genap atau keduanya ganjil. Lebih lanjut, kita mengatakan bahwa paritas dari sebuah bilangan adalah

genap atau ganjil. Beberapa hal yang berkaitan dengan paritas bilangan bulat adalah sebagai berikut.

1. Dua bilangan bulat dengan paritas berbeda tidak mungkin bernilai sama.
2. Sebuah bilangan akan berubah paritasnya jika dijumlahkan dengan sebuah bilangan ganjil.
3. Sebuah bilangan tidak berubah paritasnya jika dijumlahkan dengan sebuah bilangan genap.

Dalam memecahkan masalah matematika terkadang diperlukan penjelasan yang berkaitan dengan paritas. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.9.1

Misalkan terdapat sebuah papan catur berukuran 10×10. Jika dua ujung yang tidak berdekatan dibuang seperti pada gambar, dapatkah semua petak yang tersisa ditutup dengan kartu-kartu domino 1×2? Jelaskan.

Jawab

Sepintas, setelah kita membaca dan mengerti maksud masalah ini, kita terdorong untuk mencoba melakukannya, dan setelah beberapa kali mencoba kita dapat menyimpulkan bahwa hal ini tidak mungkin.
Tanpa paritas, hal ini sulit untuk dijelaskan.
Dengan memerhatikan paritas, kita melihat bahwa kedua ujung yang tidak berdekatan pada sebuah papan catur berwarna sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan keduanya berwarna hitam. Dengan membuang kedua ujung hitam ini, tersisa 50 petak putih dan 48 petak

hitam. Dengan memerhatikan bahwa setiap kartu domino selalu menutup satu petak putih dan satu petak hitam, jelas bahwa kita tidak mungkin menutup 50 petak putih dan 48 petak hitam dengan menggunakan domino-domino tersebut.

Contoh 3.4.9.2

Terdapat lima titik dengan koordinat bilangan bulat di bidang-*xy*. Buktikan bahwa terdapat dua titik di antaranya yang mempunyai titik tengah dengan koordinat bilangan bulat.

Jawab

Kita dapat memerhatikan paritas untuk membuktikan hal ini. Mula-mula kita perhatikan bahwa koordinat titik-titik di bidang-*xy* mempunyai empat kemungkinan pasangan paritas, yaitu (ganjil, ganjil), (ganjil, genap), (genap, ganjil), (genap, genap). Karena hanya terdapat 4 kemungkinan sedangkan kita mempunyai 5 titik, maka menurut prinsip rumah merpati (dengan 5 objek dan 4 kotak), pasti terdapat dua titik yang mempunyai koordinat dengan pasangan paritas yang sama. Koordinat titik tengah dari dua titik ini pasti merupakan bilangan bulat. Terbuktilah yang diinginkan.

Soal

3.172 Tersedia sepuluh koin dan tiga gelas. Dapatkah kita memasukkan setiap koin ke dalam gelas sehingga setiap gelas terisi koin dengan jumlah ganjil?

3.173 Jumlah dua bilangan prima adalah 129. Tentukan hasil kali kedua bilangan prima tersebut.

3.174 Tentukan bilangan prima terkecil yang habis membagi hasil dari $5^{11} + 7^{13}$.

3.175 Bilangan-bilangan 1, 2, 3, ..., 10 dituliskan dalam satu baris. Di antara setiap dua bilangan diberi tanda "+" atau "–". Tunjukkan bahwa kita tidak mungkin mendapatkan hasil 0.

3.176 Terdapat sembilan titik dengan koordinat bilangan bulat di ruang-xyz. Buktikan bahwa terdapat dua titik di antaranya yang mempunyai titik tengah dengan koordinat bilangan bulat.

3.177 Misalkan $f(n)$ adalah hasil penjumlahan dari n suku pertama barisan

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

a. Tentukan rumus $f(n)$ untuk n ganjil. Tentukan pula rumus $f(n)$ untuk n genap.

b. Buktikan

$$f(s + t) - f(s - t) = st$$

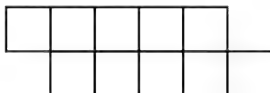
dengan s dan t adalah bilangan-bilangan asli sehingga $s > t$.

3.178 Diketahui

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

dengan koefisien-koefisien a_i adalah bilangan bulat. Jika $p(0)$ dan $p(1)$ keduanya ganjil, buktikan bahwa persamaan $p(x) = 0$ tidak mempunyai akar bilangan bulat.

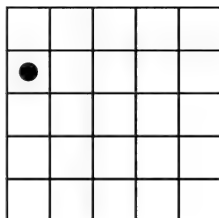
Petunjuk : Buktikan dulu bahwa $p(k + 2) - p(k)$ merupakan bilangan genap (habis dibagi 2) untuk setiap bilangan bulat k. Dari sini, gunakan kenyataan bahwa $p(0)$ dan $p(1)$ keduanya ganjil untuk menyimpulkan bahwa $p(x)$ selalu ganjil untuk setiap bilangan bulat x.

3.179 Sepuluh petak disusun sebagai berikut.

Dapatkah kita menggunakan lima kartu domino 1×2 untuk menutup petak-petak tersebut? Jelaskan.

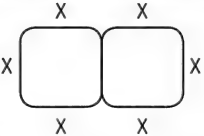
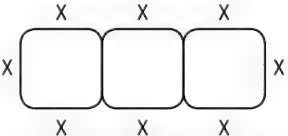
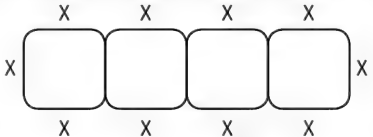
3.180 Sebuah papan catur berukuran 5×5 tiga ujungnya dibuang, dapatkah semua petak sisanya ditutup dengan kartu-kartu domino?

3.181 Ada sebuah kelas yang di dalamnya terdapat 25 kursi dalam susunan 5 baris, di mana setiap barisnya terdiri dari 5 kursi. Setiap kursi ditempati oleh satu orang siswa. Sekarang, Pak Guru meminta agar

semua siswa harus berpindah ke kursi yang berada tepat di depannya, tepat di belakangnya, tepat di kirinya, atau tepat di kanannya. Apakah permintaan Pak Guru dapat dipenuhi?

3.182 Perhatikan papan catur berukuran 5×5 berikut.

Berawal dari petak yang bertanda, jelaskan apakah kita dapat membuat garis lurus tak terputus yang melalui semua petak pada papan catur tersebut masing-masing tepat satu kali? Kita hanya dapat membuat garis vertikal dan horisontal.

3.183 Seperti yang kita ketahui, bidak kuda dalam sebuah papan catur hanya dapat bergerak membentuk huruf "L". Letakkan sebuah bidak kuda pada sebuah petak yang terletak di tengah pada papan catur berukuran 5×5. Dapatkah kuda tersebut berpindah ke setiap petak pada papan catur tersebut kemudian kembali ke petak semula di mana ia diletakkan?

3.4.10 Membuat Gambar atau Figur yang Membantu

Kadangkala untuk menangkap maksud dari suatu masalah kita perlu membuat gambar atau figur. Selain untuk menangkap maksud masalah, gambar atau figur juga seringkali diperlukan dalam menyelesaikan masalah itu sendiri. Perhatikanlah ketiga contoh berikut.

Contoh 3.4.10.1

Setiap meja dalam sebuah restoran berbentuk persegi yang dapat memuat empat orang yaitu satu orang pada setiap sisinya. Jika terdapat 30 meja yang digabungkan menjadi satu meja panjang, berapa orang yang dapat dimuat?

Jawab

Kita mencoba mengumpulkan data dengan bantuan gambar.

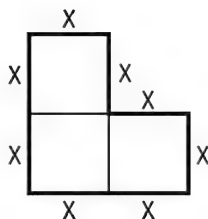
Banyak meja	Gambar	Banyak orang
2		6
3		8
4		10

Dengan memerhatikan gambar-gambar di atas, kita dapat melihat dan menyimpulkan bahwa jika terdapat 30 meja yang digabungkan menjadi satu meja panjang, maka banyaknya orang yang dapat dimuat adalah dua kali 30 orang yang duduk pada jajaran horisontal ditambah dengan dua orang pada kedua sisi yang lain, sehingga

$$2 \times 30 + 2 = 62$$

Jadi, banyak orang yang dapat dimuat jika terdapat 30 meja yang digabungkan menjadi satu meja panjang adalah 62 orang.

Soal

3.184 Kerjakanlah kembali contoh 3.4.10.1 jika setiap meja berbentuk "L" seperti pada gambar berikut.

a. Misalkan terdapat dua meja seperti ini yang digabungkan. Tuliskan kemungkinan-kemungkinan banyaknya orang yang dapat dimuat berdasarkan kemungkinan dari susunan kedua meja tersebut. Di antara semua susunan ini, manakah susunan yang dapat memaksimalkan banyaknya orang yang dapat dimuat?
b. Jika terdapat 30 meja seperti ini yang digabungkan, berapa banyaknya orang maksimal yang dapat dimuat?
c. Jika terdapat n meja seperti ini yang digabungkan, berapa banyaknya orang maksimal yang dapat dimuat?

3.185 Sebuah kabel ekstensi memiliki 4 buah outlet. Jika seseorang ingin menyalakan 25 alat listrik secara bersamaan, dan hanya terdapat 1 stop kontak, berapa banyaknya kabel ekstensi minimal yang dibutuhkan?

3.186 Ayah akan membangun sebuah taman berbentuk persegi panjang di depan rumah. Di sekeliling taman tersebut akan dipasangi tonggak-tonggak yang kemudian akan dihubungkan dengan menggunakan pagar. Jika ukuran taman adalah 8 meter $\times$ 6 meter dan tonggak-tonggak tersebut harus dipasang dengan jarak antartonggak sama yaitu 2 meter, berapa banyak tonggak yang diperlukan?

3.187 Seekor siput sedang memanjat pipa saluran air. Setiap siang, siput tersebut naik 8,5 meter. Sayangnya, setiap malam selalu hujan, dan ketika hujan, siput tersebut tergelincir turun 1 meter. Berapa hari yang diperlukan oleh siput itu untuk sampai ke atas pipa tersebut, jika tingginya 45 meter?

3.188 Sekelompok anak berdiri membentuk lingkaran sehingga anak ke-2014 berdiri tepat berhadapan diametral dengan anak ke-19. Berapa banyak anak dalam kelompok itu?

Contoh 3.4.10.2

Tayangan sebuah sinetron komedi disponsori oleh delapan produk yaitu produk A, B, C, D, E, F, G, dan H. Urutan penayangan kedelapan produk tersebut harus memenuhi ketentuan sebagai berikut. Produk A ditayangkan pada urutan ketiga. Produk G ditayangkan pada urutan

kelima. Produk E ditayangkan tepat sebelum produk C ditayangkan. Jika produk E adalah produk keempat sesudah produk D ditayangkan, tentukan pada urutan ke berapa produk E ditayangkan.

Jawab

Kita mencoba membuat figur yang berkaitan dengan masalah ini, sehingga kita dapat berpikir dengan lebih mudah.

(1) Mula-mula kita membuat delapan kotak yang menunjukkan urutan penayangan kedelapan produk tersebut.

1	2	3	4	5	6	7	8

(2) Dikatakan bahwa produk A ditayangkan pada urutan ketiga dan produk G ditayangkan pada urutan kelima, maka kita masukkan dalam kotak-kotak ini.

		A		G			
1	2	3	4	5	6	7	8

(3) Hal lain yang diketahui adalah bahwa :

(a) Produk E ditayangkan tepat sebelum produk C ditayangkan.

(b) Produk E adalah produk keempat sesudah produk D ditayangkan.

Dari sini kita memiliki urutan D ___ ___ ___ E C, namun kita belum mengetahui di mana urutan ini harus diletakkan. Maka marilah kita mencoba menerka dari kemungkinan-kemungkinan.

Perhatikan, jika D diletakkan pada kotak pertama, maka E akan terletak pada kotak kelima. Hal ini tidak mungkin sebab kotak kelima sudah terisi oleh G.

Selanjutnya jika D diletakkan pada kotak kedua, maka E dan C masing-masing terletak pada kotak keenam dan ketujuh. Hal ini mungkin, dan tidak ada kemungkinan lain selain ini, maka kita dapat menarik kesimpulan bahwa produk E ditayangkan pada urutan ke-6.

	D	A		G	E	C	
1	2	3	4	5	6	7	8

Soal

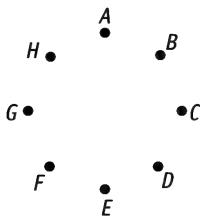
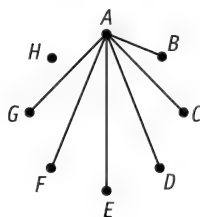
3.189 Di antara lima orang gadis, yaitu Mulan, Brenda, Rena, Cynthia, dan Sherly, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Mulan dan Rena memakai jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Rena dan Brenda berbeda, demikian pula dengan Brenda dan Cynthia. Tentukan kedua gadis yang memakai rok.

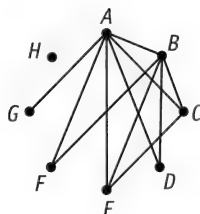
3.190 Lima SMA menjalani akreditasi oleh sebuah tim akreditasi. Kelima SMA tersebut yaitu SMA 21, SMA 22, SMA 23, SMA 24, dan SMA 25 harus diakreditasi pada hari berbeda satu sama lain, mulai Senin hingga Jumat. Tim harus mengunjungi SMA 21 dulu baru SMA 24, juga harus mengunjungi SMA 22 dulu baru SMA 25. Jika SMA 23 tidak boleh diakreditasi pada hari Senin, maka pada hari apakah SMA 22 diakreditasi?

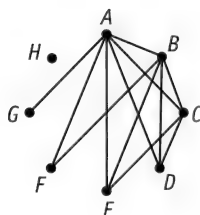
Contoh 3.4.10.3

Ayah dan Ibu menghadiri sebuah pertemuan yang dihadiri oleh tiga pasang suami istri lain. Dalam pertemuan itu sejumlah, tetapi tidak semua, orang berjabat tangan. Tidak ada dua orang yang berjabat tangan lebih dari sekali, dan setiap orang tidak berjabat tangan dengan suami atau istrinya sendiri. Ayah dan Ibu berjabat tangan dengan beberapa orang. Pada akhir acara, Ayah bertanya kepada ketujuh orang lain yang hadir, berapa banyak jabat tangan yang telah mereka lakukan. Ternyata setiap orang memberikan jawaban yang berbeda-beda. Berapa banyak jabat tangan yang telah dilakukan oleh Ibu?

Jawab

Untuk menyelesaikan masalah ini kita akan merepresentasikan kedelapan orang yang hadir di pertemuan tersebut dengan delapan titik, yaitu A, B, C, D, E, F, G, dan H.

Kini kita perhatikan bahwa kemungkinan-kemungkinan jawaban dari pertanyaan Ayah adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Oleh karena itu, salah satu di antara kedelapan orang ini, tanpa mengurangi keumuman misalnya *A*, telah berjabat tangan dengan 6 orang lainnya, misalnya *B, C, D, E, F, G*.

Berdasarkan gambar ini, terlihat bahwa *H* adalah orang yang tidak berjabat tangan dengan siapapun. Jelas bahwa *H* adalah pasangan dari *A*.

Kemudian salah satu di antara *B, C, D, E, F, G* berjabat tangan dengan 5 orang lainnya. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan orang itu adalah *B*, yang berjabat tangan dengan *A, C, D, E, F*.

Berdasarkan gambar ini, terlihat bahwa *G* adalah orang yang berjabat tangan dengan 1 orang lainnya. Terlihat pula bahwa *B* pasti merupakan pasangan *G*.

Kemudian tanpa mengurangi keumuman, misalkan *C* berjabat tangan dengan 4 orang lainnya, misalnya *A, B, D, E*.

Berdasarkan gambar ini, dengan penalaran yang sama akan terlihat bahwa F dan C adalah pasangan suami istri, dan oleh karena itu D dan E adalah pasangan suami istri.

Kita lihat bahwa D dan E masing-masing berjabat tangan dengan 3 orang lainnya. Karena Ayah menerima jawaban yang berbeda-beda untuk pertanyaannya, maka salah satu di antara D dan E pasti adalah Ayah. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan D adalah Ayah, akibatnya E adalah Ibu.

Jadi, banyak jabat tangan yang telah dilakukan oleh Ibu adalah 3 kali.

3.4.11 Memanfaatkan Kesimetrian dalam Masalah

Istilah simetri muncul dalam cabang geometri atau ilmu ukur, namun yang akan kita lihat di sini tentu tidak terbatas pada kesimetrian dalam geometri. Beberapa masalah yang istimewa dapat kita selesaikan dengan memandang adanya kesimetrian di dalamnya. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.4.11.1

Selesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 30 \\ x + 3y + 2z = 30 \\ 2x + y + 3z = 30 \end{cases}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa sistem persamaan yang diberikan memperlihatkan kesimetrian antara variabel-variabel x, y, z. Oleh karena itu, jika (t_1, t_2, t_3) adalah solusi sistem persamaan ini, maka (t_2, t_3, t_1) dan (t_3, t_1, t_2) pasti juga merupakan solusi. Mudah diuji bahwa sistem persamaan ini hanya memiliki tepat satu solusi, maka $t_1 = t_2 = t_3$. Akibatnya, $x = y = z$, sehingga $6x = 30 \Leftrightarrow x = 5 = y = z$. Jadi, solusi dari sistem persamaan ini adalah (5, 5, 5).

Beberapa persamaan polinomial dengan bentuk yang istimewa dapat diselesaikan dengan memanfaatkan kesimetrian. Hal ini diperlihatkan dalam contoh berikut.

Contoh 3.4.11.2

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$$

Jawab

Tentu tidak mudah menyelesaikan persamaan polinomial berderajat empat seperti ini dengan cara biasa. Tetapi polinomial di atas memiliki keistimewaan, yaitu koefisien x^4 sama dengan konstanta, dan koefisien x^3 sama dengan koefisien x. Persamaan polinomial dengan bentuk seperti ini dapat diselesaikan dengan cara berikut.

Pertama, karena $x = 0$ bukan merupakan akar (buktikan hal ini dengan cara menyubstitusikan $x = 0$ ke persamaan tersebut), maka kita dapat membagi kedua ruas dengan x^2 sehingga diperoleh

$$2x^2 + 9x + 14 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

Selanjutnya misalkan

$$y = x + \frac{1}{x}$$

dengan harapan kita dapat menyatakan bentuk yang tersisa, yaitu $x^2 + \frac{1}{x^2}$ dalam variabel y. Tentu saja

$$y^2 \neq x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Tetapi perhatikan bahwa

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

Sehingga kita memperoleh

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Akibatnya, persamaan tadi dapat kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned} & 2(y^2 - 2) + 9y + 14 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2y^2 + 9y + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (2y + 5)(y + 2) = 0 \end{aligned}$$

Jadi, $y = -\frac{5}{2}$ atau $y = -2$.

a. Jika $y = -\frac{5}{2}$, artinya $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. Persamaan ini ekuivalen dengan $2x^2 + 5x + 2 = 0$, yang dapat difaktorkan menjadi $(2x + 1)(x + 2) = 0$ sehingga diperoleh $x = -\frac{1}{2}$ atau $x = -2$.

b. Jika $y = -2$, artinya $x + \frac{1}{x} = -2$. Persamaan ini ekuivalen dengan $x^2 + 2x + 1 = 0$, yang dapat difaktorkan menjadi $(x + 1)^2 = 0$ sehingga diperoleh $x = -1$.

Dengan demikian, semua nilai x yang memenuhi persamaan polinomial tersebut adalah $x = -\frac{1}{2}$, $x = -2$, dan $x = -1$.

Soal

3.191 Selesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 10 \\ 4a + b + 2c + 3d = 10 \\ 3a + 4b + c + 2d = 10 \\ 2a + 3b + 4c + d = 10 \end{cases}$$

3.192 Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

3.193 Jika $x = 1 - 2\sqrt{2}$ dan $y = 1 + 2\sqrt{2}$, hitunglah:

a. $x^4 + y^4 - \dfrac{7}{xy}$

b. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

Petunjuk : Hitung dulu $x + y$ dan xy, lalu nyatakan bentuk yang ingin dicari nilainya dalam bentuk $x + y$ dan xy.

3.194 Bilangan 12 memiliki faktor-faktor 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Hasil perkalian dari faktor-faktor ini adalah

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 12 = 1728$$

Misalkan $p(n)$ hasil perkalian faktor-faktor dari sembarang bilangan asli n. Tentukan rumus untuk $p(n)$.

Petunjuk : Perhatikan kembali cara menentukan banyaknya faktor suatu bilangan asli yang telah dibahas dalam bab sebelumnya.

3.195 Hitunglah hasil penjumlahan

$$\frac{1}{1+a^{-n}} + \ldots + \frac{1}{1+a^{-2}} + \frac{1}{1+a^{-1}} + \frac{1}{1+a^{0}} + \frac{1}{1+a^{1}} + \frac{1}{1+a^{2}} + \ldots + \frac{1}{1+a^{n}}$$

Petunjuk : Jumlahkan dulu $\dfrac{1}{1+a^{-n}} + \dfrac{1}{1+a^{n}}$, berapa hasilnya?

3.196 Hitunglah hasil perkalian

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 63^\circ}{\cos 3^\circ}\right)\ldots\left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right)$$

Petunjuk : Kalikan dulu suku pertama dan suku terakhir, berapa hasilnya? Gunakan rumus

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Para pembaca yang telah mempelajari kalkulus dapat memerhatikan satu contoh lain berikut.

Contoh 3.4.11.3

Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

Jawab

Pertama-tama marilah kita substitusikan

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

Maka kita memperoleh

$$dx = -dy$$

Jika $x = 0$, maka $y = \frac{\pi}{2}$, sedangkan jika $x = \frac{\pi}{2}$, maka $y = 0$. Dengan demikian,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{1+\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^{\sqrt{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+(\cot y)^{\sqrt{2}}} \times \frac{(\tan y)^{\sqrt{2}}}{(\tan y)^{\sqrt{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan y)^{\sqrt{2}}\,dy}{1+(\tan y)^{\sqrt{2}}}$$

Oleh karena itu, kita menemukan suatu kesimetrian, yaitu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}\,dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

Tambahkan kedua ruas dengan integral pada ruas kiri, diperoleh

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}\,dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Jadi, diperoleh

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}$$

Perhatikan bahwa dalam contoh di atas, sebenarnya jika $\sqrt{2}$ diganti dengan bilangan real positif yang lain, maka hasilnya akan tetap sama.

Soal

3.197 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$$

3.198 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(\sin x)^{\cos x}}$$

3.199 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{e^{\sin x}+1}$$

3.200 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Hitunglah nilai dari

$$\int_0^{2} \frac{\sqrt{\ln(7-x)}}{\sqrt{\ln(7-x)}+\sqrt{\ln(x+5)}} dx$$

3.201 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus***)

Hitunglah nilai dari

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx$$

3.202 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus***)

Hitunglah nilai dari

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \ln\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$$

Petunjuk : Substitusikan $x=\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)-y=\frac{\pi}{2}-y$.

3.203 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus***)

Hitunglah nilai dari

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{1+e^x} dx$$

3.4.12 Memerhatikan Kasus Ekstrem

Kadangkala berguna jika kita menganalisis suatu permasalahan dengan memerhatikan kasus ekstremnya. Memerhatikan kasus ekstrem berarti memerhatikan kemungkinan terburuk atau kemungkinan yang membuat masalah tersebut menjadi mudah diselesaikan. Dalam pemecahan masalah matematika, strategi memerhatikan kasus ekstrem ini sebenarnya sudah muncul dalam pembahasan kita mengenai prinsip rumah merpati. Para pembaca dapat memerhatikan kembali contoh 2.7.3 di mana kita menggunakan strategi ini.

Selain dalam prinsip rumah merpati, banyak masalah-masalah lain yang dapat diselesaikan dengan memandang kasus ekstrem. Kita mulai dengan satu contoh sederhana berikut.

Contoh 3.4.12.1

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli x dengan $x \leq 8$, selalu berlaku $x^2 < 70$.

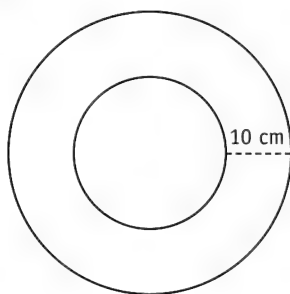
Jawab

Mungkin strategi yang terlintas di benak kita adalah menggunakan metode pembuktian lengkap untuk membuktikan pernyataan ini. Dengan pembuktian lengkap, ada delapan kemungkinan nilai x yang harus kita perhatikan, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8. Tetapi kita mengetahui bahwa untuk setiap bilangan asli x, x^2 monoton naik, artinya semakin besar nilai x, semakin besar pula nilai x^2. Oleh karena itu, untuk membuktikan hal ini kita cukup memerhatikan kemungkinan terburuk, yaitu ketika x diisi oleh kemungkinan nilai yang terbesar, yaitu 8.

Untuk $x = 8$, maka $x^2 = 8^2 = 64 < 70$. Karena untuk nilai x yang terbesar berlaku $x^2 < 70$, maka untuk nilai-nilai x yang lain pastilah berlaku pula. Terbukti.

Satu contoh lain berikut memperlihatkan penerapan strategi ini dalam bidang geometri.

Contoh 3.4.12.2

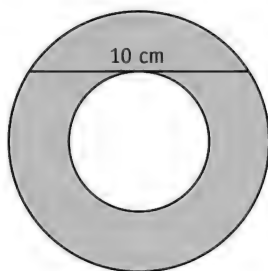
Dua buah lingkaran sepusat memiliki selisih jari-jari 10 cm. Berapakah selisih kelilingnya?

Jawab

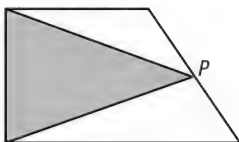
Kita dapat menyelesaikan permasalahan ini secara aljabar, yaitu dengan memisalkan kedua jari-jari lingkaran tersebut dan menghitung keliling dari kedua lingkaran lalu mengurangkannya. Tetapi kini kita akan menggunakan strategi memerhatikan kasus ekstrem.

Dalam soal ini, jari-jari kedua lingkaran tersebut tidak diketahui, dan intuisi kita mengatakan bahwa jawaban dari soal ini hanya bergantung pada informasi yang diketahui di soal. Oleh karena itu, untuk memperoleh jawaban dari soal ini, kita cukup memandang satu kasus ekstrem yang mempermudah, yaitu kasus dimana jari-jari lingkaran kecil adalah nol. Pada kondisi ini, lingkaran kecil menjadi titik pusat bagi lingkaran besar, dan selisih jari-jari tadi menjadi jari-jari lingkaran besar. Selisih kelilingnya menjadi keliling lingkaran besar, sebab keliling sebuah titik adalah nol. Jadi, selisih keliling kedua lingkaran ini sama dengan keliling sebuah lingkaran berjari-jari 10 cm, yaitu 20π cm.

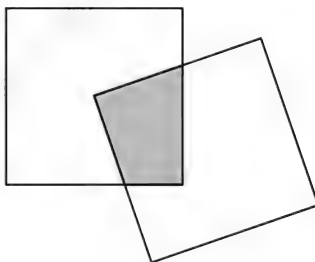
Soal

3.204 Dengan strategi memerhatikan kasus ekstrem, buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dengan $4 \leq x \leq 99$, selalu berlaku $15 < x^2 < 10000$.

3.205 Perhatikan gambar dua lingkaran yang sepusat berikut. Dibuat sebuah tali busur dalam lingkaran besar yang menyinggung lingkaran kecil. Jika panjang tali busur ini adalah 10 cm, tentukan luas daerah yang diarsir, yaitu luas daerah antara kedua lingkaran.

3.206 Suatu kelompok organisasi bermaksud mendesain sebuah bendera untuk organisasi mereka. Mereka menginginkan bentuk bendera ini adalah trapesium siku-siku dan di dalamnya terdapat segitiga yang salah satu sisinya berimpit dengan kaki trapesium yang memben-

tuk sudut siku-siku, dan titik sudut di depannya terletak pada kaki trapesium yang lain, seperti pada gambar.

Di manakah seharusnya letak titik P agar luas segitiga ini adalah setengah dari luas bendera tersebut?

Petunjuk : Pandang dua kasus ekstrem. Pertama, jika trapesium itu berbentuk segitiga siku-siku (panjang sisi atasnya nol). Kedua, jika trapesium itu berbentuk persegi panjang (panjang sisi atas dan bawahnya sama). Apa yang bisa disimpulkan?

3.207 Dua buah persegi identik, masing-masing dengan panjang sisi 8, diletakkan sedemikian rupa sehingga titik tengah persegi pertama berimpit dengan salah satu titik sudut persegi kedua seperti pada gambar berikut. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

Petunjuk : Putarlah persegi kedua sampai diperoleh kondisi istimewa yang memudahkan kita untuk menghitung luas daerah yang diarsir itu.

3.208 Nilai-nilai ulangan seseorang berkisar dari 0 hingga 100. Jika ia telah mengikuti sebanyak lima kali ulangan dan nilai rata-rata yang ia peroleh adalah 90, berapakah nilai terkecil yang mungkin ia peroleh dalam salah satu ulangan?

3.209 Ada sebuah bilangan kuadrat sempurna empat digit yang dua digit pertama dan dua digit terakhirnya masing-masing juga merupakan bilangan kuadrat sempurna. Carilah bilangan tersebut.

Petunjuk : Berapa bilangan terkecil dan terbesar yang mungkin? Perkirakan nilai akar kuadrat dari keduanya.

3.210 Misalkan diketahui titik $A(7, -1)$ di bidang. Tentukan koordinat sebuah titik B yang terletak pada garis $y = 3x - 2$ sehingga ruas garis AB sependek mungkin.

Petunjuk : Ruas garis AB yang terpendek diperoleh ketika AB tegak lurus garis $y = 3x - 2$.

3.211 ***(Hanya untuk yang sudah mempelajari vektor)***

Misalkan $\vec{a}$ sebuah vektor di ruang sehingga untuk setiap vektor $\vec{b}$ di ruang berlaku $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Buktikan bahwa $\vec{a}$ adalah vektor nol.

Petunjuk : Pilihlah vektor $\vec{b}$ yang sesuai untuk disubstitusikan ke persamaan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ sehingga memberikan kesimpulan bahwa $\vec{a}$ adalah vektor nol.

3.4.13 Strategi Psikologis

Strategi terakhir ini sangat penting untuk dimiliki. Yang dimaksud dengan strategi psikologis di sini tentu saja berkaitan dengan sikap kita dalam menyelesaikan masalah.

Pertama-tama, seperti yang telah beberapa kali disinggung, kita tidak boleh ragu-ragu untuk mencoba menyelesaikan suatu masalah, khususnya dalam memilih dan melakukan strategi atau teknik yang kita gunakan.

Jika suatu strategi telah kita coba ternyata gagal, cobalah menyelesaikan dengan strategi yang lain. Umumnya, strategi yang berhasil kita temukan setelah beberapa kali mencoba strategi yang gagal. Jadikanlah kegagalan sebagai jembatan untuk mendapatkan solusi dari permasalahan tersebut.

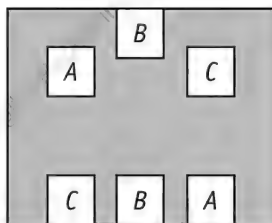
Tumbuhkanlah kepercayaan diri dan keoptimisan dalam diri kita. Berpikir positif dan percaya pada kemampuan diri kita sendiri dapat

menjadikan kita tidak mudah menyerah dalam memecahkan masalah. Bahkan bila kita melihat suatu masalah yang bagi kita tampak mustahil untuk diselesaikan, ini tidak berarti bahwa masalah tersebut benar-benar mustahil untuk diselesaikan. Jika kita berhadapan dengan situasi semacam ini, cobalah lakukan terlebih dahulu apa yang dapat kita lakukan dari masalah tersebut. Harapan kita adalah apa yang kita lakukan ini dapat menjadi awal untuk menyelesaikan masalah tersebut.

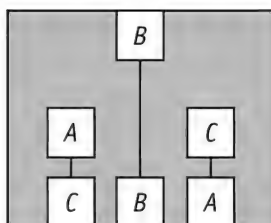
Di sisi lain, tak kalah penting pula bahwa kita harus meluangkan waktu untuk memecahkan masalah. Oleh karena itu, pemecahan masalah memang membutuhkan kesabaran.

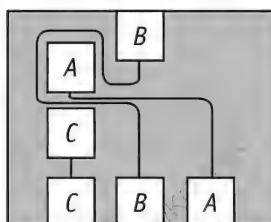
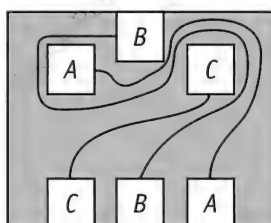
Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.4.13.1

Perhatikan gambar berikut ini. Dapatkah kita menghubungkan setiap kotak kecil di atas dengan setiap kotak kecil di bawah yang berhuruf sama tanpa ada garis yang berpotongan atau keluar dari kotak besar?

Jawab

Masalah-masalah semacam ini seakan ingin menguji seberapa cepat kita akan menyerah dan mengatakan “tidak dapat”, sebab setelah beberapa kali mencoba, hal ini terlihat tidak mungkin.

Namun, cobalah kita mulai dengan optimis, dengan asumsi bahwa hal ini mungkin. Marilah kita mencoba menyederhanakan permasalahan ini. Setelah beberapa kali kita mencoba, tampak bahwa kesulitan permasalahan ini terletak pada posisi kotak A dan C di atas yang terbalik. Akan lebih mudah jika kita menukar posisi mereka menjadi seperti di bawah ini.

Di sini kita telah menerapkan strategi menyelesaikan masalah yang lebih sederhana. Namun, tentu masalah ini belum selesai. Bagaimana agar masalah ini selesai? Tentu kita perlu mengembalikan posisi kotak *A* dan *C* yang tadi kita tukar.

Maka marilah kita lakukan hal ini, mulai dari kotak *A* terlebih dahulu.

Dan selanjutnya kotak *C*.

Dan tanpa kita sadari, masalah ini telah kita selesaikan.

Contoh di atas memperlihatkan bahwa kita tidak boleh tergesa-gesa dengan tegas menyatakan tidak mungkin. Terlebih dahulu luangkanlah waktu untuk mencoba. Hindarilah sikap tergesa-gesa mengklaim ketidakmungkinan.

Berikut diberikan satu contoh lain yang mengajarkan kepada kita bahwa kita tidak boleh terlalu tergesa-gesa dalam memecahkan masalah.

Contoh 3.4.13.2

Andi menempuh perjalanan dengan mengendarai mobil. Pada setengah perjalanan pertamanya ia menempuh perjalanan dengan kecepatan 30 Km per jam, dan pada setengah perjalanan berikutnya ia menempuh perjalanan dengan kecepatan 60 Km per jam. Berapa kecepatan rata-rata Andi dalam perjalanan ini?

Jawab

Tentu dengan cepat kita berpikir bahwa kecepatan rata-ratanya adalah

$$\frac{30+60}{2} = 45 \text{ Km per jam}$$

Benarkah? Jawabannya adalah tidak. Masalah ini mengatakan bahwa Andi menempuh setengah perjalanannya dengan kecepatan 30 Km per jam dan setengah perjalanan berikutnya dengan kecepatan 60 Km per jam. Hal yang perlu ditekankan di sini adalah setengah perjalanannya, bukan setengah waktunya. Oleh karena itu, solusi yang benar adalah sebagai berikut.

Misalkan d menyatakan jarak yang ditempuhnya pada setiap setengah bagian perjalanannya. Misalkan t_1 dan t_2 menyatakan waktu yang diperlukan pada setengah perjalanan pertama dan setengah perjalanan kedua. Untuk setengah perjalanan yang pertama kita mendapatkan

$$t_1 = \frac{d}{30}$$

sedangkan untuk setengah perjalanan yang kedua kita mendapatkan

$$t_2 = \frac{d}{60}$$

sehingga kecepatan rata-rata perjalanannya adalah total jarak yang ditempuh dibagi dengan total waktu yang diperlukan, yaitu

$$\frac{d+d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{30}+\frac{d}{60}} \times \frac{60}{60} = \frac{120d}{2d+d} = \frac{120d}{3d} = 40$$

Jadi, kecepatan rata-rata Andi dalam perjalanan ini adalah 40 Km per jam.

Selain tidak tergesa-gesa, kita harus berusaha berpikir dengan kritis dan logis. Berikut akan diberikan satu contoh terakhir sebagai inspirasi. Sebagai saran, sebaiknya bacalah terlebih dahulu soal yang diberikan, namun jangan langsung membaca solusi yang ada. Cobalah berpikir terlebih dahulu untuk mencoba memecahkannya. Solusi yang ada hanyalah untuk memeriksa kebenarannya.

Contoh 3.4.13.3

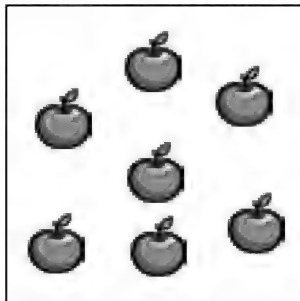
Di atas meja terdapat empat obat berbentuk pil elips identik, dua di antaranya merupakan obat batuk dan dua yang lain merupakan obat pilek. Siang hari, Tony harus meminum satu pil obat batuk dan satu pil obat pilek. Malam harinya, ia harus minum satu pil obat batuk dan satu pil obat pilek. Pagi hari, adiknya yang nakal mengacaukan posisi obat-obat tersebut sehingga Tony tidak lagi tahu mana yang merupakan obat batuk dan mana yang merupakan obat pilek. Bagaimana cara dia dapat minum dengan dosis yang tepat?

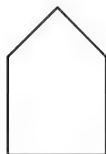
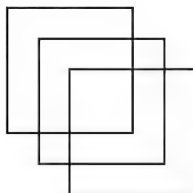
Jawab

Tony dapat meminum obat dengan dosis yang tepat dengan cara membagi keempat pil tersebut masing-masing menjadi dua potongan yang sama, dan meminum salah satu potongan dari setiap pil. Hal ini sama artinya dengan ia telah meminum satu pil obat batuk dan satu pil obat pilek. Jika ini ia lakukan pada siang hari, maka sisa potongan-potongan tersebut ia minum pada malam hari.

Soal

3.212 Tinggi seekor jerapah adalah 200 cm ditambah dengan setengah dari tingginya. Berapakah tinggi jerapah tersebut?

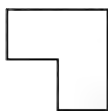
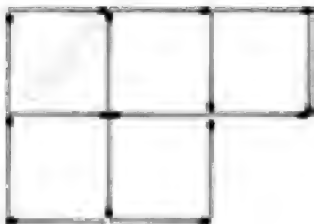
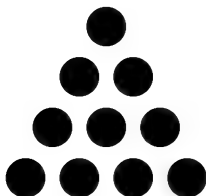
3.213 Perhatikan gambar tujuh apel berikut. Dapatkah kita membuat tiga garis lurus pada gambar ini sehingga membaginya menjadi tujuh bagian yang masing-masing memuat satu apel?

3.214 a. Dapatkah kita membuat gambar berikut tanpa mengangkat alat tulis kita dari kertas dan tanpa melalui garis yang sama lebih dari sekali?

b. Buktikanlah bahwa bentuk di bawah ini dapat dibagi menjadi tiga bagian yang kemudian ketiga bagian tersebut dapat disusun menjadi sebuah persegi.

3.215 Buatlah gambar berikut tanpa mengangkat alat tulis kita dari kertas dan tanpa melalui garis yang sama lebih dari sekali.

2.216 Membagi bangun menjadi bagian-bagian yang kongruen (identik).

a. Bagilah bangun segitiga sama sisi di bawah ini menjadi empat bagian yang kongruen.

b. Bangun di bawah ini diperoleh dengan menggabungkan tiga persegi yang berukuran sama. Bagilah bangun tersebut menjadi empat bagian yang kongruen.

c. Bagilah bangun segienam beraturan di bawah ini menjadi :

1) Empat bagian yang kongruen.
2) Delapan bagian yang kongruen.
3) Dua belas bagian yang kongruen.

2.217 Misalkan beberapa batang korek api tersusun sebagai berikut. Buanglah tiga batang korek api dalam gambar berikut sehingga tersisa tiga buah persegi yang sama besar.

3.218 Sepuluh koin tersusun membentuk segitiga yang menghadap ke atas seperti pada gambar berikut. Pindahkan tepat tiga koin agar susunan koin-koin tersebut menjadi sebuah segitiga yang menghadap ke bawah.

3.219 Seorang murid tertangkap basah oleh seorang gurunya di kolam renang. Guru tersebut ingin menangkap sang murid, namun dia tidak bisa berenang. Kecepatan lari sang guru tiga kali kecepatan sang murid berenang. Sedangkan di darat sang murid lebih cepat larinya dibandingkan sang guru. Kolam renang tersebut berbentuk persegi dan sang murid berada tepat di tengah kolam, sedangkan sang guru berada pada salah satu sudut kolam. Apakah sang murid dapat melarikan diri dari guru tersebut? Jelaskan.

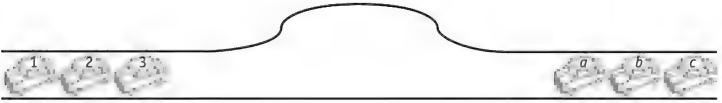
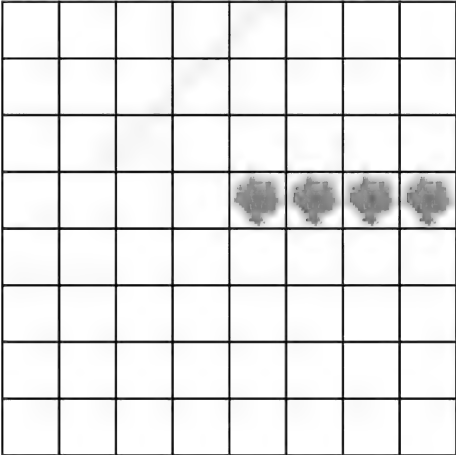
Petunjuk : Sang murid harus berusaha membuat sang guru terkecoh.

3.220 Sebuah istana yang tanahnya berbentuk persegi dikelilingi oleh suatu parit yang dalam selebar 10 kaki. Seseorang ingin mencapai istana tetapi harus terlebih dahulu melalui parit ini dengan hanya menggunakan dua buah papan dengan panjang masing-masing 9,5 kaki. Tanpa menggunakan lem, paku, atau apapun selain kedua papan tersebut, bagaimana ia dapat melakukan hal ini?

3.221 Sebuah sungai akan diseberangi oleh enam orang yang terdiri dari empat orang pemuda dan dua orang anak dengan menggunakan sebuah perahu. Perahu tersebut hanya dapat diisi dua orang anak atau satu orang pemuda dalam sekali penyeberangan. Bagaimana keenam orang ini dapat menyeberangi sungai tersebut?

3.222 Empat orang harus menyeberangi sebuah jembatan tua yang akan rubuh 17 menit lagi. Jembatan tersebut cukup rapuh sehingga hanya bisa memuat dua orang dalam sekali penyeberangan. Karena waktu itu malam gelap gulita, penyeberangan harus dilakukan dengan bantuan sinar senter. Sayangnya hanya ada satu senter untuk keempat orang tersebut. Keempat orang tersebut mampu berjalan dengan kecepatan berbeda. Ayah mampu menyeberang dalam 1 menit, Ibu 2 menit, Adik 5 menit, dan Nenek 10 menit. Bagaimana cara keempat orang tersebut dapat menyeberangi jembatan tersebut dengan selamat?

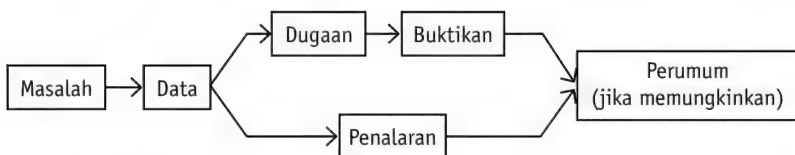
3.223 Di sebuah gang sempit yang kedua ujungnya ditutup, terdapat dua barisan mobil yang saling berhadapan. Masing-masing barisan terdiri

dari tiga mobil. Kedua barisan mobil tersebut ingin saling bertukar posisi. Pada bagian tengah gang terdapat ruang kecil yang hanya cukup ditempati satu mobil. Jelaskan bagaimana pertukaran posisi ini dapat dilakukan sampai ketiga mobil berlabel huruf berada di kiri dan ketiga mobil berlabel angka berada di kanan.

3.224 Seorang ayah memiliki sebidang tanah berukuran 8 petak × 8 petak. Pada tanah itu terdapat empat batang pohon yang terletak seperti pada gambar di bawah. Ia bermaksud membagi tanah ini menjadi empat bagian untuk diwariskan kepada empat orang anaknya, tanpa menebang atau memindahkan pohon tersebut. Jelaskan bagaimana ia dapat membagi tanah ini menjadi empat bagian dengan luas yang sama dan pada masing-masing bagian terdapat satu pohon.

BAB IV
DATA DAN PENALARAN

Bab ini merupakan kelanjutan dan pembahasan lebih mendalam dari strategi-strategi pemecahan masalah yang ada, khususnya strategi mengumpulkan data. Pada bab ini kita akan mencoba menerapkan beberapa strategi dasar yang telah kita bahas sebelumnya. Nanti kita akan melihat bahwa strategi yang paling banyak muncul dalam pembahasan ini adalah mengumpulkan data, menerka, dan membuktikan.

Dalam bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa strategi mengumpulkan data dapat menjadi langkah awal kita dalam menyelesaikan masalah, khususnya ketika kita belum memiliki ide atau gagasan. Mengumpulkan data dalam menyelesaikan masalah matematika dapat menjadi hal yang sama pentingnya dengan mengumpulkan data dalam penelitian-penelitian sains, sebab data-data yang telah terkumpul dalam penelitian sains dapat menjadi awal dan acuan bagi langkah berikutnya dari penelitian tersebut.

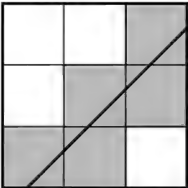
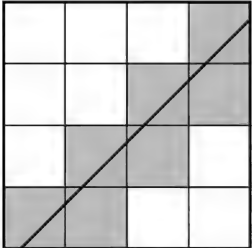
Dari data yang telah kita kumpulkan, diharapkan kita dapat memperoleh suatu gagasan. Dari gagasan tersebut kita dapat membuat dugaan atau penalaran untuk menyelesaikan masalah tersebut. Jika yang kita temukan adalah sebuah dugaan atau terkaan (konjektur), maka tugas kita selanjutnya adalah membuktikan dugaan tersebut. Jika kita langsung dapat menemukan penalarannya, pertanyaan yang muncul adalah dapatkah kita menggunakan penalaran tersebut untuk memperumum (menggeneralisasi).

Secara garis besar, proses berpikir kita dalam bab ini dapat dituangkan dalam skema berikut.

4.1 Beberapa Contoh Permasalahan

Pada bagian ini akan diberikan contoh-contoh permasalahan lain di mana strategi ini dapat diterapkan. Seperti yang telah dijelaskan di atas, strategi mengumpulkan data dapat memberikan kita gagasan untuk merumuskan dugaan atau penalaran. Contoh 4.1.1 dan 4.1.2 merupakan kasus di mana data yang kita kumpulkan memberikan gagasan untuk merumuskan dugaan, kemudian kita membuktikan dugaan tersebut, sedangkan contoh 4.1.3 merupakan kasus di mana data yang kita kumpulkan memberikan penalaran.

Contoh 4.1.1

Sebuah garis lurus dibuat pada sebuah papan catur berukuran $n \times n$. Berapa banyaknya petak maksimal yang dilalui garis lurus tersebut?

Jawab

Kita awali dengan mengumpulkan data.

Mengumpulkan Data

Kesulitan pada soal ini terletak pada bilangan n yang abstrak. Oleh karena itu, marilah kita menyederhanakannya dengan mencari data untuk nilai-nilai yang kecil, dengan membuat beberapa gambar sederhana yang dapat membantu kita.

Ukuran papan catur	Gambar	Banyaknya petak maksimal yang dilalui
1×1		1
2×2		3

3×3		5
4×4		7

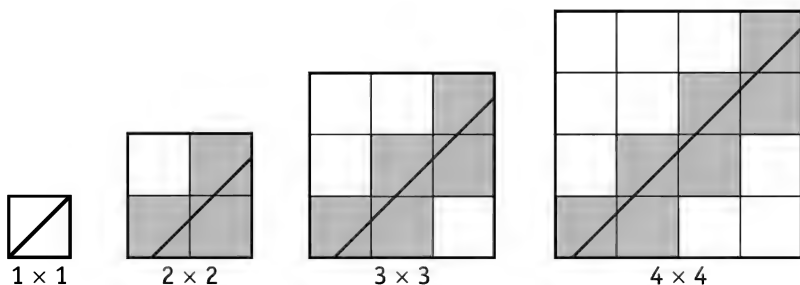
Dengan memerhatikan data di atas, dengan mudah kita dapat meneruskan pola berikut.

n	1	2	3	4	. . .	n
Banyak petak	1	3	5	7	. . .	$2n - 1$

Dugaan

Jadi, dugaan kita adalah banyaknya petak maksimal yang dilalui garis lurus yang dibuat pada papan berukuran $n \times n$ adalah sebanyak $(2n - 1)$ petak.

Bukti

Kini tugas kita selanjutnya adalah membuktikan dugaan ini. Umumnya, hal ini dapat kita lakukan dengan cara memerhatikan data-data yang kita peroleh.

Ikutilah penjelasan berikut langkah demi langkah.

(1) Perhatikanlah bahwa dalam setiap gambar tersebut, garis hitam harus memotong *semua* garis horisontal dan *semua* garis vertikal yang ada di dalam papan catur.

(2) Pada papan catur berukuran $n \times n$, tentu ada sebanyak $n - 1$ garis horisontal dan $n - 1$ garis vertikal yang harus dipotong oleh garis hitam.

(3) Jadi, tentu garis hitam ini harus dipotong sebanyak $(n - 1) + (n - 1) = 2n - 2$ kali. Dengan kata lain, ada sebanyak $2n - 2$ titik potong pada garis hitam.

(4) Apa hubungan antara banyaknya titik potong dengan banyaknya petak yang dilalui? Hal ini dapat dianalogikan sebagai berikut. Jika kita memotong sebuah tali sebanyak 1 kali, tentu tali ini akan terbagi menjadi 2. Jika kita potong 2 kali, tali ini terbagi menjadi 3. Jika kita potong 3 kali, tali ini terbagi menjadi 4. Jelas terlihat bahwa jika kita potong n kali, tali ini akan terbagi menjadi $n + 1$ bagian.

    Demikian pula dengan kasus ini. Jika terdapat sebanyak $2n - 2$ titik potong pada garis hitam, tentu garis hitam ini akan terbagi menjadi $(2n - 2) + 1 = 2n - 1$ bagian, di mana setiap bagian melalui satu petak pada papan.

Jadi, dugaan kita terbukti.

Di sinilah proses berpikir dan logika kita dilatih. Kita hendaknya tidak cepat puas dengan data yang kita peroleh, melainkan yang terpenting adalah kita perlu mencari dari mana asal semua itu. Berikut akan diberikan contoh lain.

Contoh 4.1.2

Misalkan n adalah bilangan asli. Tentukan batas untuk nilai n agar

$$n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4$$

selalu bukan merupakan bilangan prima.

Jawab

Kita awali dengan mengumpulkan data.

Mengumpulkan Data

Dengan mengumpulkan data untuk beberapa nilai n, mudah didapatkan bahwa:

n	1	2	3	4	5	6
$n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4$	5	60	221	572	1221	2300

Dugaan

Dari data ini, dugaan kita adalah untuk nilai n yang lebih dari 1, bentuk tersebut selalu menghasilkan bilangan yang bukan prima.

Bukti

Bagaimana membuktikan dugaan ini?

Agar kita dapat menjamin bahwa

$$n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4$$

bukan merupakan bilangan prima, tentu kita harus dapat memfaktorkannya. Salah satu metode memfaktorkan bentuk aljabar yang seringkali ampuh adalah dengan mengubahnya menjadi selisih dari dua bentuk kuadrat. Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4 &= n^2(n^2 + 4n + 4) - 4 \\ &= n^2(n + 2)^2 - 4 \\ &= [n(n + 2)]^2 - 2^2 \\ &= [n(n + 2) - 2][n(n + 2) + 2] \\ &= (n^2 + 2n - 2)(n^2 + 2n + 2) \end{aligned}$$

Kemudian mudah kita perlihatkan bahwa

$$n^2 + 2n + 2 \geq 5$$

untuk setiap bilangan asli n. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & n \geq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & n + 1 \geq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & (n + 1)^2 \geq 2^2 \\ \Leftrightarrow \quad & n^2 + 2n + 1 \geq 4 \\ \Leftrightarrow \quad & n^2 + 2n + 2 \geq 5 \end{aligned}$$

Tetapi perhatikanlah

$$n^2 + 2n - 2 \geq 1$$

yang dapat kita peroleh dengan cara serupa. Maka untuk $n = 1$,

$$n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4 = 1 \times 5 = 5$$

yang merupakan bilangan prima.

Kemudian, untuk $n \geq 2$, kita peroleh

$$n^2 + 2n - 2 \geq 6$$

dan

$$n^2 + 2n + 2 \geq 10$$

Jadi, dengan memerhatikan bahwa

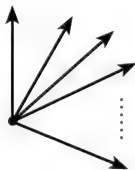
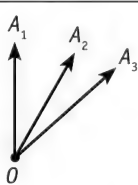
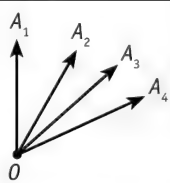
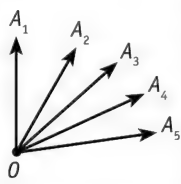
$$n^4 + 4n^3 + 4n^2 - 4 = (n^2 + 2n - 2)(n^2 + 2n + 2)$$

serta $n^2 + 2n + 2 \geq 10$ dan $n^2 + 2n - 2 \geq 6$ untuk $n \geq 2$, terbukti bahwa bentuk tersebut selalu bukan merupakan bilangan prima untuk $n \geq 2$.

Kedua contoh di atas memperlihatkan suatu proses berpikir di mana kita mengumpulkan data, membuat dugaan, dan membuktikan dugaan tersebut. Semakin banyak data yang kita kumpulkan, kita semakin yakin akan kebenaran dugaan kita. Namun, seberapa banyak pun data yang telah kita kumpulkan, tidak pernah keyakinan itu mencapai 100%. Jadi, kita harus membuktikan dugaan tersebut.

Adakalanya, dengan mengumpulkan data kita telah dapat menelusuri penalaran untuk menjawab masalah yang diberikan. Perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1.3

Perhatikan gambar berikut. Tentukan banyaknya sudut yang terbentuk jika terdapat sebanyak 2011 garis.

Jawab

Kita awali dengan mengumpulkan data.

Mengumpulkan Data

Kesulitan pada soal ini terletak pada bilangan 2011. Kembali kita mengumpulkan data, dengan mengganti bilangan 2011 dengan bilangan-bilangan yang kecil.

Banyak garis	Gambar	Sudut-sudut	Banyak sudut
1	A_1, O	–	0
2	A_1, A_2, O	A_1OA_2	1
3	A_1, A_2, A_3, O	A_1OA_2 A_2OA_3 A_1OA_3	3
4	A_1, A_2, A_3, A_4, O	A_1OA_2 A_2OA_3 A_3OA_4 A_1OA_3 A_2OA_4 A_1OA_4	6
5	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, O	A_1OA_2 A_2OA_3 A_3OA_4 A_4OA_5 A_1OA_3 A_2OA_4 A_3OA_5 A_1OA_4 A_2OA_5 A_1OA_5	10

Penalaran

Perhatikanlah bahwa dengan menuliskan satu demi satu sudut seperti di atas, kita dapat dengan mudah menebak pola dari data tersebut. Oleh karena itu, penting bagi kita untuk menuliskan data-data tersebut dengan rapi dan terurut.

Susunan data di atas tampak membentuk seperti "segitiga siku-siku sama kaki" yang dengan pola yang berkesinambungan. Dengan memerhatikan susunan data di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa apabila terdapat sebanyak 2011 garis, sudut-sudut yang terbentuk adalah

$A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \ldots, A_{2010}OA_{2011}$

$A_1OA_3, A_2OA_4, A_3OA_5, \ldots, A_{2009}OA_{2011}$

$A_1OA_4, A_2OA_5, A_3OA_6, \ldots, A_{2008}OA_{2011}$

$\vdots$

$A_1OA_{2010}, A_2OA_{2011}$

A_1OA_{2011}

Dengan demikian, cara kita menghitung banyaknya sudut untuk setiap data di atas adalah sebagai berikut.

Banyak garis	Banyak sudut
1	0
2	1
3	1 + 2 = 3
4	1 + 2 + 3 = 6
5	1 + 2 + 3 + 4 = 10
$\vdots$	$\vdots$
2011	$1 + 2 + 3 + \ldots + 2010$ $= (1 + 2010) + (2 + 2009) + \ldots + (1005 + 1006)$ $= \underbrace{2011 + 2011 + \ldots + 2011}_{\text{sebanyak } 1005}$ $= 1005 \times 2011$ $= 2021055$

Jadi, jika terdapat sebanyak 2011 garis maka terbentuk sebanyak 2.021.055 sudut.

Perumuman

Perhatikan bahwa kita dapat memperumum hal ini.

Jika terdapat sebanyak n garis, maka banyaknya sudut yang terbentuk adalah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

yang kita peroleh menurut soal 3.65 yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika.

Contoh 4.1.4

Berapa banyak jabat tangan yang dapat dilakukan jika terdapat sebanyak n orang?

Jawab

Dalam buku ini dibahas banyak cara memandang permasalahan jabat tangan ini. Pada bab dasar-dasar berhitung, kita telah melihat bahwa banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan jika terdapat sebanyak n orang sama dengan banyaknya cara memilih dua objek dari n objek yang tersedia, yaitu $C(n, 2)$.

Akan tetapi, di sini akan diperlihatkan suatu cara pandang yang berbeda. Kita dapat mengawali dengan mengumpulkan data, namun di sini hanya akan dibahas penalarannya.

Kita perhatikan bahwa dalam kasus ini, masing-masing orang yang ada harus berjabat tangan dengan setiap orang lainnya. Misalkan kita pandang salah satu orang yang ada di antara sekumpulan n orang tersebut. Tentu orang ini harus berjabat tangan dengan $n - 1$ orang yang lain. Karena terdapat sebanyak n orang, maka ada sebanyak $n \times (n - 1)$ jabat tangan. Namun, kita mengetahui bahwa jabat tangan bersifat simetris, artinya A berjabat tangan dengan B sama artinya dengan B berjabat tangan dengan A. Oleh sebab itu, dalam penghitungan $n \times (n - 1)$ tadi kita telah menghitung setiap jabat tangan sebanyak dua kali. Maka, $n \times (n - 1)$ tadi harus kita bagi dengan 2. Jadi, ada sebanyak

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

jabat tangan yang dapat dilakukan jika terdapat sebanyak n orang.

Pada satu contoh lain berikut, pengumpulan data juga diserahkan kepada pembaca sebagai latihan, dan kita akan membahas penalarannya.

Contoh 4.1.5

Carilah bilangan asli n dan bilangan-bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ agar hasil kali $a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n$ sebesar mungkin dan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1000$$

Jawab

Tentu hal yang membuat masalah ini sulit adalah bilangan 1000. Maka kita dapat mengumpulkan data dengan mengganti bilangan 1000 ini dengan bilangan-bilangan yang kecil seperti 2, 3, 4, 5, dan seterusnya. Dengan cara ini kita akan tertuntun untuk mendapatkan bahwa agar hasil kali tersebut sebesar mungkin haruslah:

(1) Tidak ada a_i yang bernilai lebih dari 4.

Jika sembarang $a_i > 4$, kita dapat menuliskan

$$a_i = \left\lfloor \frac{a_i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{a_i}{2} \right\rceil$$

dengan fungsi *floor* $\lfloor \ldots \rfloor$ dan *ceiling* $\lceil \ldots \rceil$ berturut-turut menyatakan pembulatan ke bawah dan pembulatan ke atas. Sebagai contoh, 5 dapat kita tuliskan sebagai 3 + 2. Selanjutnya kita bagi menjadi dua kasus, yaitu:

(a) Jika a_i genap, maka $\frac{a_i}{2}$ merupakan bilangan bulat, sehingga hasil kali dari kedua bilangan yang baru adalah $\frac{a_i^2}{4}$. Karena $a_i > 4$,maka

$$\frac{a_i^2}{4} = \frac{a_i \times a_i}{4} > \frac{4 \times a_i}{4} = a_i$$

Karena hasil kali dari kedua bilangan baru ini lebih besar daripada a_i, maka agar hasil kali tersebut sebesar mungkin, tidak ada a_i yang bernilai lebih dari 4.

(b) Jika a_i ganjil, maka $\frac{a_i}{2}$ merupakan bilangan pecahan, yang jika dibulatkan ke bawah dan ke atas berturut-turut menghasilkan

$\frac{a_i - 1}{2}$ dan $\frac{a_i + 1}{2}$, sehingga hasil kali dari kedua bilangan yang

baru adalah $\frac{a_i^2 - 1}{4}$. Karena $a_i > 4$ dan a_i ganjil, maka $a_i \geq 5$, sehingga

$$\frac{a_i^2 - 1}{4} = \frac{a_i \times a_i - 1}{4} \geq \frac{5 \times a_i - 1}{4} = a_i + \frac{a_i - 1}{4} > a_i$$

Karena hasil kali dari kedua bilangan baru ini lebih besar daripada a_i, maka agar hasil kali tersebut sebesar mungkin, tidak ada a_i yang bernilai lebih dari 4.

Jadi, agar hasil kali tersebut sebesar mungkin, tidak ada a_i yang bernilai lebih dari 4.

(2) Tidak ada a_i yang bernilai 1.

Jika sembarang $a_i = 1$, maka dalam jumlah

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1000$$

pasti terdapat a_j lain, dengan $i \neq j$, yang merupakan bilangan ganjil. Kita misalkan $a_j = 2a + 1$ untuk suatu bilangan bulat positif a (jika $a = 0$ maka kita dapat menuliskan $a_i + a_j = 1 + 1$ sebagai (2), maka jumlah dari a_i dan a_j adalah

$$a_i + a_j = 1 + 2a + 1 = (a + 1) + (a + 1)$$

Perhatikan bahwa hasil kali

$$(a + 1)(a + 1) = a^2 + 2a + 1$$

lebih besar daripada hasil kali a_i dan a_j mula-mula, yaitu

$$a_i a_j = (1)(2a + 1) = 2a + 1$$

Jadi, agar hasil kali tersebut sebesar mungkin, tidak ada a_i yang bernilai 1.

(3) Semua a_i dapat kita ganti menjadi 2 atau 3.

Hal ini merupakan akibat dari (1) dan (2) di atas.

(4) Paling banyak dua bilangan a_i bernilai 2.

Jika ada lebih dari dua bilangan a_i bernilai 2, artinya paling sedikit tiga bilangan a_i bernilai 2, maka kita dapat menuliskan ketiga bilangan 2 tersebut sebagai 3 + 3 dengan hasil kali $3 \times 3 = 9$, sebagai ganti 2 + 2 + 2 dengan hasil kali $2 \times 2 \times 2 = 8$.

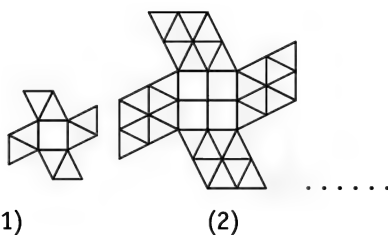
Oleh karena itu, untuk

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1000$$

bilangan-bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ haruslah terdiri atas 2 buah bilangan 2 dan 332 buah bilangan 3, dengan hasil kali maksimum $2^2 \times 3^{332}$.

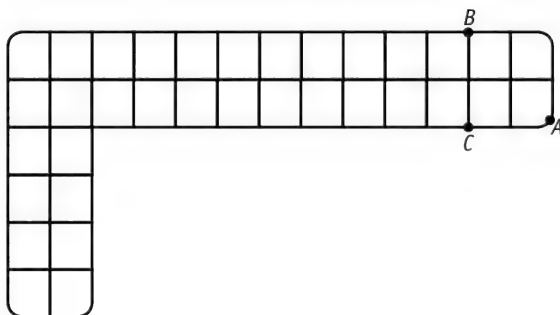
Setelah memerhatikan beberapa contoh di atas, cobalah menyelesaikan berbagai jenis soal dalam perlatihan berikut dengan mengawalinya dengan mengumpulkan data. Jika gagasan sulit untuk diperoleh hanya dengan mengumpulkan sedikit data, luangkanlah lebih banyak waktu untuk mengumpulkan lebih banyak data hingga kita dapat melihat gagasan dari data yang kita peroleh. Di sinilah kesabaran kita akan dilatih.

Soal

4.1 Seseorang bermain pola menggunakan segitiga-segitiga sama sisi dan persegi-persegi kecil. Pola (1) dan pola (2) dibangunnya, dan seterusnya.

a. Dapatkanlah pola dari banyaknya segitiga dan persegi pada setiap gambar yang dibuat.

b. Tentukan banyaknya segitiga dan persegi yang diperlukan untuk membangun pola ke-20.

c. Tentukan banyaknya segitiga dan persegi yang diperlukan untuk membangun pola ke-n.

4.2 Suatu meja bola sodok berbentuk huruf L yang diberi variasi berupa persegi-persegi seperti tampak pada gambar berikut ini.

Bola berada di titik A disodok mengenai titik B dan memantul secara sempurna. Misalkan P_n menyatakan banyaknya pantulan yang terjadi sebelum bola menyentuh titik C untuk ke-n kali.

a. Tentukan $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

b. Tentukan P_n untuk n ganjil. Tentukan pula P_n untuk n genap.

c. Cobalah merumuskan P_n secara umum.

4.3 Perumumlah contoh 4.1.1 untuk papan catur berukuran $m \times n$. Berapa banyaknya petak maksimal yang dapat dilalui garis tersebut?

4.4 Carilah jumlah dari

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$$

4.5 Carilah jumlah dari $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ dengan cara sebagai berikut.

a. Dari soal 4.4 telah diperoleh jumlah dari

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$$

Gunakanlah hasil ini untuk mendapatkan jumlah dari

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

b. Carilah data dari jumlah

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

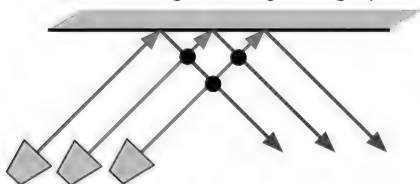
untuk beberapa nilai n. Buatlah dugaan. Kaitkan dengan butir a.

c. Buktikanlah dugaan tersebut.

4.6 a. Dengan mengumpulkan data, hitunglah

$$\frac{2+4+6+8+\ldots+34+36+38}{3+6+9+12+\ldots+51+54+57}$$

b. Buktikanlah bahwa berapapun suku dari barisan tersebut selalu memberikan hasil yang sama.

4.7 Perhatikan gambar di bawah. Tiga buah sinar laser disorotkan sehingga memantul pada sebuah dinding dan terjadi tiga pertabrakan sinar.

a. Kumpulkanlah data banyaknya pertabrakan sinar yang terjadi jika disorotkan sebanyak 1, 2, 3, 4, dan 5 sinar laser.

b. Carilah banyaknya pertabrakan sinar yang terjadi jika disorotkan sebanyak n sinar laser.

4.8 Kita akan menghitung banyaknya diagonal bidang yang dapat dibuat dalam sebuah prisma segi-n.

a. Selesaikanlah masalah yang lebih sederhana. Hitunglah banyaknya diagonal yang dapat dibuat dalam sebuah segi-n beraturan. Kerjakan hal ini dengan cara pandang seperti pada contoh 4.1.4 mengenai masalah jabat tangan.

b. Kembalilah ke masalah semula dengan memerhatikan hasil yang telah diperoleh pada butir a.

4.9 Sebanyak n garis sejajar dipotong oleh m garis sejajar lain. Berapa banyak daerah yang terbentuk?

4.10 Hitunglah

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+2^{-2^n})$$

Catatan:

Notasi "Π" menyatakan perkalian. Arti dari penulisan ini adalah

$$(1+2^{-2^0})(1+2^{-2^1})(1+2^{-2^2}).....$$

sampai dengan tak berhingga.

a. Carilah hasil perkalian ini hingga 1 suku, 2 suku, 3 suku, dan seterusnya. Mungkin diperlukan kalkulator untuk mempercepat penghitungan ini.

b. Perhatikanlah bahwa hasil-hasil tersebut mendekati suatu bilangan tertentu. Berapakah bilangan itu? Tuliskan hasil-hasil tadi dalam bentuk pecahan desimal agar nilai yang didekati lebih mudah terlihat.

c. Buktikanlah hal yang diperoleh pada butir b.

Petunjuk: Perhatikan kembali soal 3.130.

4.11 Carilah kemudian buktikan suatu rumus umum berdasarkan pengamatan-pengamatan berikut.

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

dan seterusnya.

4.12 Perhatikanlah bahwa

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}} \times \frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

$$\vdots$$

Terka dan buktikan rumus umum untuk pernyataan-pernyataan di atas.

4.13 Jika n adalah bilangan bulat, buktikan bahwa

$$n^4 - 20n^2 + 4$$

bukan merupakan bilangan prima.

4.14 Misalkan f adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan bulat yang memenuhi sifat-sifat berikut.

- $f(2) = 2$
- $f(mn) = f(m)f(n)$ untuk semua bilangan asli m, n.
- $f(m) > f(n)$ jika $m > n$.

a. Terlebih dahulu tentukan rumus fungsi tersebut. Carilah data untuk nilai $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(16)$. Buatlah suatu dugaan dari data yang diperoleh.

b. Perhatikanlah bahwa dari sifat ketiga diperoleh

$$f(2) < f(3) < f(4)$$

Dari sini tentukan nilai $f(3)$.

c. Tentukan nilai $f(6)$ kemudian tentukan pula nilai $f(5)$.

d. Dari semua hasil di atas, buatlah dugaan untuk rumus fungsi tersebut.

e. Buktikan dugaan ini dengan induksi matematika. Mungkin diperlukan pembagian kasus dalam langkah induksi dan langkah penarikan kesimpulan.

f. Tentukan $f(2011)$.

4.15 Diberikan $T_0 = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 6$, dan untuk $n \geq 3$,

$$T_n = (n + 4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n - 8)T_{n-3}$$

Beberapa suku pertamanya adalah

$$2, 3, 6, 14, 40, 152, 784, 5168, 40576, 363392$$

Carilah, dengan pembuktian, rumus untuk T_n dalam bentuk $T_n = A_n + B_n$, dengan A_n dan B_n adalah rumus umum barisan-barisan yang sering dijumpai.

a. Pikirkanlah rumus umum barisan-barisan yang sering dijumpai. Carilah data untuk barisan-barisan:

$\{n\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

$\{2n\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

$\{2n + 1\} =$ ....

$\{n^2\} =$ ....

$\{(-1)^n\} =$ ....

$\{2^n\} =$ ....

$\{n!\} =$ ....

b. Buatlah terkaan untuk

$$T_n = A_n + B_n$$

dengan memilih A_n dan B_n dari data yang telah dibuat pada butir a.

c. Buktikanlah terkaan tersebut.

4.16 Bilangan 3 dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan dari satu atau lebih bilangan asli dengan memerhatikan urutan dalam empat cara, yaitu 3, 1 + 2, 2 + 1, dan 1 + 1 + 1. Hitunglah banyaknya cara menyatakan bilangan asli n sebagai hasil penjumlahan dari satu atau lebih bilangan asli dengan memerhatikan urutan.

Petunjuk : Untuk membuktikan dugaan, pandanglah hal ini sebagai banyaknya cara meletakkan pembatas sebagai ganti tanda "+" pada penjumlahan

$$n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}$$

Perhatikan bahwa setiap tanda "+" yang ada mempunyai dua kemungkinan, yaitu diberi pembatas atau tidak diberi pembatas.

4.17 Terdapat 1000 sakelar lampu dalam satu deretan dalam kondisi OFF, dan terdapat 1000 orang iseng. Orang pertama menekan ke-1000 sakelar tersebut satu per satu. Selanjutnya, orang kedua menekan sakelar ke-2, 4, 6, 8, 10, dan seterusnya hingga sakelar ke-1000. Orang ketiga menekan sakelar ke-3, 6, 9, 12, 15, dan seterusnya. Orang keempat menekan sakelar ke-4, 8, 12, 16, dan seterusnya. Berapa banyak dan sakelar mana saja yang ON setelah proses ini berlangsung sampai seluruh orang melakukannya?

a. Kumpulkan data untuk menjawab permasalahan ini. Buatlah dugaan dari data yang telah diperoleh.

b. Buktikan dugaan yang telah diperoleh dengan mengumpulkan data.

   Petunjuk : Gunakan pengetahuan mengenai cara menghitung banyaknya faktor positif dari suatu bilangan asli. Hal ini telah dibahas dalam bab dasar-dasar berhitung.

c. Sakelar manakah yang paling banyak ditekan?

d. Sakelar manakah yang hanya ditekan sebanyak dua kali?

4.18 Untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n yang kurang dari 100, nilai n manakah yang menyebabkan bentuk kombinasi $C(2n, n)$ habis dibagi 3?

4.19 Hari Jumat yang bertepatan dengan tanggal 13 sering dikatakan sebagai "hari sial". Setiap tanggal 13 dalam suatu bulan akan jatuh pada hari Jumat jika bulan tersebut dimulai dengan hari Minggu. Dalam kalender, berapa kali minimal dan maksimal "hari sial" ini muncul dalam satu tahun?

4.20 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Carilah turunan ke-n dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ dengan cara sebagai berikut.

a. Nyatakanlah $f(x)$ sebagai

$$f(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

dengan A dan B bilangan-bilangan yang terlebih dulu ditentukan nilainya.

b. Carilah data untuk turunan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya hingga diperoleh pola. Terkalah bentuk umum turunan ke-n dari fungsi ini.

c. Buktikanlah terkaan tersebut dengan induksi matematika.

4.21 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Diberikan $f(x) = xe^{2x}$. Misalkan $f^{(n)}$ menyatakan turunan ke-n dari f. Buktikan bahwa $f^{(n)}(x) = a_n e^{2x} + b_n xe^{2x}$, untuk suatu bilangan a_n dan b_n. Carilah rumus untuk a_n dan b_n.

4.2 Beberapa Penalaran yang Salah

Dalam penalaran matematis seringkali kita tidak menyadari bahwa langkah-langkah kita melalui sesuatu yang salah. Pada bagian ini akan diberikan beberapa contoh penalaran yang seakan-akan sempurna, namun sebenarnya tidaklah demikian. Pembahasan ini dimaksudkan agar memberikan pesan bahwa dalam berpikir hendaknya kita tidak melupakan hal-hal kecil, terutama yang bersifat konseptual. Kita mulai dengan suatu contoh yang mungkin sudah terkenal dan sering dijumpai.

Contoh 4.2.1

Carilah kesalahan dalam penalaran berikut.

$$x = 1$$

Kalikan kedua ruas dengan x,

$$x^2 = x$$

Kurangkan kedua ruas dengan 1,

$$x^2 - 1 = x - 1$$

Faktorkan ruas kiri,

$$\cancel{(x-1)}(x+1) = \cancel{x-1}$$

Faktor $(x - 1)$ saling menghapuskan pada kedua ruas,

$$x + 1 = 1$$

Dengan melihat kembali persamaan pertama, kita substitusikan

$$1 + 1 = 1$$

Jadi,

$$2 = 1$$

Jawab

Kesalahan semacam ini tak jarang dilakukan oleh para pelajar yang belum terbiasa dengan bentuk aljabar. Namun, mereka tidak menyadari bahwa hal tersebut salah, sebab tidak semua kesalahan semacam ini berujung pada suatu kontradiksi. Di sini kita melihat bahwa ada suatu kesalahan yang mengantarkan kita pada kesimpulan 2 = 1. Kesalahan tersebut terletak pada pencoretan faktor $(x - 1)$ pada kedua ruas. Kita perhatikan bahwa menurut persamaan pertama, $x = 1$, oleh sebab itu, bentuk $(x - 1)$ bernilai nol. Akibatnya, mencoret faktor $(x - 1)$ pada kedua ruas sama artinya dengan kita membagi kedua ruas tersebut dengan nol. Pembagian dengan nol tidak terdefinisikan.

Seandainya kita berpikir bahwa 2 = 1 merupakan suatu kesimpulan yang benar, hal ini akan berakibat pada semua bilangan bernilai sama. Hal ini tentu saja tidak mungkin. Berikut adalah contoh yang lain.

Contoh 4.2.2

Carilah kesalahan dalam penalaran berikut.

Perhatikan bahwa

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

Jadi, 1 = -1.

Jawab

Kesalahan dalam penalaran ini lebih sulit untuk ditemukan. Banyak orang yang tidak memerhatikan bahwa sifat

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

dalam bentuk akar hanya berlaku jika a dan b merupakan bilangan-bilangan real positif. Dengan demikian, tidak benar bahwa

$$\sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$$

Guidobaldo del Monte (1545–1607), teman dari fisikawan Galileo, selama dua puluh tahun telah mempercayai sesuatu yang mustahil, yaitu 0 = 1. Hasil del Monte ini ditelusurinya lebih lanjut dan ia berpikir bahwa hal inilah yang membuktikan keberadaan Tuhan, sebab "sesuatu telah diciptakan dari sesuatu yang nihil". Dasar pemikiran del Monte adalah sifat asosiatif dari penjumlahan, yaitu bahwa untuk setiap bilangan real a, b, dan c selalu berlaku

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Sifat asosiatif atau pengelompokan ini diterapkannya dalam memanipulasi suatu deret bilangan. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 4.2.3

Penghitungan del Monte

Carilah kesalahan dalam penghitungan del Monte berikut.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, 0 = 1.

Jawab

Sebenarnya penghitungan ini sudah salah dari awal. Penulisan

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

adalah penulisan yang merepresentasikan nol sebagai hasil penjumlahan dari angka-angka nol. Yang menjadi pertanyaan adalah berapa banyak angka nol di ruas kanan? Penulisan seperti ini berarti ada tak berhingga angka nol di ruas kanan. Jika ada sebanyak tak berhingga angka nol di ruas kanan, tentu kita tidak bisa memperlakukan deret ini seperti halnya

$$0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{100}$$

misalnya, karena keduanya merupakan hal yang berbeda, yang ini memiliki angka nol sebanyak berhingga, sedangkan yang tadi memiliki angka nol sebanyak tak berhingga. Kita perhatikan bahwa

$$0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{100} = 100 \times 0$$

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = \infty \times 0$$

Bentuk yang terakhir ini bernilai tak tentu. Jadi, penulisan ini tidak benar.

Satu contoh terakhir berikut ini membahas sebuah teka-teki terkenal yang berkaitan dengan kesalahan penalaran.

Contoh 4.2.4

Tiga orang tamu bermaksud menginap dalam sebuah hotel dan membayar masing-masing $10 untuk menyewa kamar dengan biaya sewa $30. Sesaat kemudian, petugas hotel menyadari bahwa kamar tersebut seharusnya memiliki biaya sewa hanya $25, maka ia ingin mengembalikan $5 kepada ketiga tamu tersebut. Karena $5 tidak dapat dibagi rata kepada ketiga tamu tersebut, maka ia memberikan $1 kepada masing-masing tamu dan tetap memegang $2 di tangannya. Hal ini berarti ketiga orang tamu tersebut kini masing-masing membayar $9 untuk biaya sewa kamar tersebut, totalnya $27 dan petugas hotel tersebut masih memegang $2, sehingga totalnya $29. Ke manakah hilangnya uang $1?

Jawab

Jika kita tidak teliti, dibutuhkan waktu yang lama untuk dapat menemukan kesalahan dalam masalah ini. Bahkan, dalam kehidupan sehari-hari pun mungkin kita mengalami kebingungan jika hal seperti ini terjadi.

Penalaran pada soal di atas sudah benar sampai dengan $1 yang dibagi rata kepada ketiga tamu. Jadi, ketiga orang tersebut menyewa kamar seharga $25 dengan mengumpulkan uang $9 per orang, sehingga total uang yang akan digunakan untuk membayar adalah $27. Setelah membayar $27 untuk harga $25, maka diperoleh uang kembali $2. Tentu tidak masuk akal jika jumlah uang yang dibayarkan yaitu $27 ditambahkan dengan jumlah uang kembalinya yaitu $2. Hasil penjumlahan ini tidak ada hubungannya dengan nilai $30 di awal.

Untuk memperjelas, nilai \$30 pada kasus di atas terdiri dari

\$30 (pembayaran semula) = \$25 (biaya sewa) + \$3 (kembalian) + \$2 (sisa)

Setelah uang kembalian diberikan, yang tersisa adalah

\$27 (pembayaran bersih) = \$25 (biaya sewa) + \$2 (sisa)

yang merupakan pernyataan yang benar. Perhatikan bahwa dalam persamaan ini sudah tidak terlihat informasi mengenai \$30 lagi. Malah seharusnya uang \$2 dikembalikan ("dipindahruaskan" ke kiri) karena merupakan sisa uang kembalian yang belum dikembalikan kepada ketiga tamu tadi.

Contoh-contoh kekeliruan di atas memberikan pengetahuan kepada kita bahwa dalam langkah-langkah mengerjakan soal-soal yang sederhana pun diperlukan ketelitian. Biasanya, karena terlalu sering memerhatikan hal-hal besar, hal-hal kecil seperti konsep dasar justru terlupakan. Oleh sebab itu, dalam menyelesaikan suatu masalah kita perlu membangun kebiasaan untuk berpikir bahkan sampai ke hal-hal kecil.

Sebagai perlatihan, di bawah ini diberikan beberapa penalaran keliru lain yang berujung pada kontradiksi. Untuk setiap kasus, cari dan jelaskan di mana kesalahan itu terletak.

Soal

4.22

$$\begin{aligned} a &= b \\ \Leftrightarrow \quad a^2 &= ab \\ \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) &= b(a-b) \\ \Leftrightarrow \quad a + b &= b \\ \Leftrightarrow \quad b + b &= b \\ \Leftrightarrow \quad 2b &= b \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= 1 \end{aligned}$$

4.23

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 1 \end{aligned}$$

4.24 Perhatikan persamaan

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = -x - 1$$

Kita bagi kedua ruas dengan x dengan memerhatikan bahwa $x \neq 0$,

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 - \frac{1}{x}$$

Jika hasil ini disubstitusikan ke persamaan pertama,

$$x^2 + \left(-1 - \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

Jika hasil ini disubstitusikan ke persamaan pertama,

$$1^2 + 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = 0$$

4.25 Kita mengetahui bahwa

$$1 \leq 2$$

Maka

$$1 \times {}^{10}\log\frac{1}{2} \leq 2 \times {}^{10}\log\frac{1}{2}$$

Kemudian dengan sifat logaritma diperoleh

$${}^{10}\log\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq {}^{10}\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Atau

$${}^{10}\log\frac{1}{2} \leq {}^{10}\log\frac{1}{4}$$

Sehingga

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$$

Kalikan kedua ruas dengan 4, diperoleh

$$2 \leq 1$$

Karena $1 \leq 2$ dan $2 \leq 1$, maka $1 = 2$.

4.26 Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
& -20 = -20 \\
\Leftrightarrow\ & 16 - 36 = 25 - 45 \\
\Leftrightarrow\ & 4^2 - 9 \times 4 = 5^2 - 9 \times 4 \\
\Leftrightarrow\ & 4^2 - 9 \times 4 + \frac{81}{4} = 5^2 - 9 \times 5 + \frac{81}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 4 = 5
\end{aligned}
$$

4.27 Perhatikan persamaan

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1$$

Pangkatkan tiga kedua ruas sehingga diperoleh

$$\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{x-3}\right)\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$$

Jika disederhanakan dan substitusikan $\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}\right)$ dengan 1 menurut persamaan awal, diperoleh

$$
\begin{aligned}
& 1 - x + x - 3 + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{x-3}\right)(1) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & -2 + 3\sqrt[3]{(1-x)(x-3)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 3\sqrt[3]{(1-x)(x-3)} = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt[3]{(1-x)(x-3)} = 1
\end{aligned}
$$

Pangkatkan tiga lagi kedua ruas sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
& (1 - x)(x - 3) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & -x^2 + 4x - 3 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x - 2)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2
\end{aligned}
$$

Substitusikan hasil ini ke persamaan awal, diperoleh

$$\sqrt[3]{1-2} + \sqrt[3]{2-3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 = 1$$

4.28 Misalkan

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Kalikan kedua ruas dengan 2, diperoleh

$$2x = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

Kurangkan kedua persamaan di atas, maka setiap suku barisan di ruas kanan akan saling menghapuskan dan tersisa

$$-x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

Jadi, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$.

4.29 Perhatikan persamaan

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2 \qquad (1)$$

Dari sini diperoleh

$$x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

Perhatikan pula persamaan

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 3 \qquad (2)$$

Dari sini diperoleh

$$x^3 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{3}$$

Tetapi persamaan (1) dan (2) sama, maka diperoleh

$$2 = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 3$$

Sehingga 2 = 3.

4.30 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari trigonometri*)

Kita mengenal identitas sudut rangkap untuk cosinus, yaitu

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{2}}$$

Kemudian jika kita substitusikan $x = \frac{3\pi}{4}$ akan diperoleh hasil

$$1 = 2$$

4.31 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Pandang limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \right)$$

Ruas kiri kita kerjakan dengan memerhatikan bahwa

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

sedangkan ruas kanan kita kerjakan menggunakan sifat limit. Diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = 0+0+0+\ldots+0$$

$$\frac{1}{2} = 0$$

4.32 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Kita mengenal turunan fungsi implisit. Misalkan kita akan menurunkan

$$x + 1 = 0$$

pada kedua ruas terhadap variabel x, maka diperoleh

$$\frac{d(x+1)}{dx} = \frac{d(0)}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 0$$

4.33 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Kita mengenal teknik pengintegralan parsial, yaitu

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Kini kita akan menggunakan teknik ini untuk menyelesaikan

$$\int \frac{1}{x} dx$$

Dengan memisalkan $u = \frac{1}{x}$ dan $dv = dx$ diperoleh

$$du = -\frac{1}{x^2} dx$$

dan

$$v = x$$

Maka

$$\int \frac{1}{x} dx = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{u} \underbrace{(x)}_{v} - \int \underbrace{(x)}_{v} \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} dx\right)}_{du}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

Dengan mengurangi $\int \frac{1}{x} dx$ pada kedua ruas, diperoleh

$$0 = 1$$

4.34 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari bilangan kompleks*)

Dalam bilangan kompleks kita mengenal rumus Euler. Dengan rumus Euler ini kita dapat melihat bahwa

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$$

Selain itu,

$$e^{\pi i} = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = -1 + 0i = -1$$

sehingga kita memperoleh

$$e^{\pi i} = e^{3\pi i}$$

Kita berikan logaritma natural pada kedua ruas sehingga diperoleh

$$\ln(e^{\pi i}) = \ln(e^{3\pi i})$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi i = 3\pi i$$

Kita bagi kedua ruas dengan πi sehingga dihasilkan

$$1 = 3$$

BAB V
BARISAN DAN DERET BILANGAN

Teknik pemecahan masalah matematika yang berkaitan dengan data dan pola seperti pada bab sebelumnya tidak lepas dari salah satu materi dalam ilmu matematika, yaitu barisan dan deret bilangan. Pada bagian ini akan dibahas materi tersebut secara khusus.

5.1 Menghitung Banyaknya Suku dalam Suatu Barisan Berpola

Marilah kita mulai dengan masalah berikut. Kita perhatikan barisan

$$k, k + 1, k + 2, k + 3, \ldots, k + n$$

dan yang menjadi pertanyaan adalah berapa banyak suku dalam barisan tersebut?

Salah satu cara yang dapat kita gunakan untuk menghitung banyaknya suku dalam suatu barisan berpola adalah dengan menuliskan setiap sukunya dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya, mulai dari suku ke-1, 2, 3, dan seterusnya. Dengan demikian, banyaknya suku dalam barisan tersebut adalah nomor urut suku terakhir.

Kita dapat menuliskan setiap suku barisan di atas dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya, mulai dari k sebagai suku ke-1, $k + 1$ sebagai suku ke-2, dan seterusnya, yaitu sebagai berikut.

$$(k - 1) + 1, (k - 1) + 2, (k - 1) + 3, \ldots, (k - 1) + n + 1$$

Kini perhatikan bahwa setiap sukunya telah memiliki bentuk yang memuat nomor urut sukunya, yaitu $(k - 1) + 1$ merupakan suku ke-1, $(k - 1) + 2$ merupakan suku ke-2, $(k - 1) + 3$ merupakan suku ke-3, dan oleh sebab itu $(k - 1) + n + 1$ tentu merupakan suku ke-$(n + 1)$. Jadi, ada sebanyak $n + 1$ suku dalam barisan tersebut.

Masalah menghitung banyaknya suku dalam suatu barisan berpola kadang kita temui dalam proses memperumum gagasan yang diperoleh dari data-data yang kita kumpulkan. Berikut akan diberikan beberapa soal.

Soal

5.1 Berapa banyak bilangan bulat dari 17 hingga 82?

5.2 Berapa banyak bilangan bulat dari a hingga b?

5.3 Berapa banyak bilangan bulat antara 19 dan 63?

5.4 Berapa banyak bilangan bulat antara a dan b?

5.5 Bilangan berapakah yang terletak pada urutan ke-43 dalam barisan

$$92, 91, 90, 89, \ldots$$

5.6 Suatu barisan terdiri dari 87 bilangan asli berurutan. Jika bilangan yang terbesar adalah 192, berapakah bilangan yang terkecil?

5.7 Suatu barisan terdiri dari n bilangan asli berurutan. Jika bilangan yang terbesar adalah b, berapakah bilangan yang terkecil?

5.8 Suatu barisan terdiri dari n bilangan asli berurutan. Jika bilangan yang terkecil adalah a, berapakah bilangan yang terbesar?

5.9 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{2n}$$

5.10 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$\frac{3}{p}, \frac{3}{p+3}, \frac{3}{p+6}, \frac{3}{p+9}, \ldots, \frac{3}{p+k}$$

5.11 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$k + n, k + n - 1, k + n - 2, k + n - 3, \ldots, k + p$$

5.12 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$m + 1, m + 3, m + 5, m + 7, \ldots, 3m + 5$$

5.13 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$b^2 + 1, b^2 + 2b + 2, b^2 + 4b + 5, b^2 + 6b + 10, \ldots, b^2 + 2ab + a^2 + 1$$

5.14 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 84$$

5.15 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 91$$

5.16 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 69$$

5.17 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 58$$

5.18 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$2, 6, 12, 20, \ldots, 420$$

5.19 Berapakah banyak suku dalam barisan:

$$3, 6, 11, 18, \ldots, 102$$

Kini misalkan kita berhadapan dengan masalah berikut. Berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3? Tentu bilangan-bilangan itu adalah

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 999$$

Kita dapat menuliskan setiap suku barisan ini dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya, yaitu:

$$3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, \ldots, 3 \times 333$$

Jadi, suku terakhir adalah suku ke-333. Jadi, ada sebanyak 333 bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3.

Pertanyaan selanjutnya adalah berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 2?

Di antara semua bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3, bilangan-bilangan yang habis dibagi 2 adalah

$$6, 12, 18, 24, \ldots, 996$$

Kita dapat menuliskan setiap suku barisan ini sebagai bentuk yang memuat nomor urut sukunya, yaitu:

$$6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, 6 \times 4, \ldots, 6 \times 166$$

Jadi, suku terakhir adalah suku ke-166. Jadi, ada sebanyak 166 bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 dan juga habis dibagi 2.

Jadi, jawaban pertanyaan tersebut, yaitu banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 2 adalah

$$333 - 166 = 167$$

Pertanyaan lainnya adalah berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 atau 2?

Kita dapat menggunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menjawab pertanyaan ini. Misalkan $n(A)$ menyatakan banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3. Dari penghitungan sebelumnya telah kita ketahui bahwa $n(A) = 333$. Selanjutnya, misalkan $n(B)$ menyatakan banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 2. Bilangan-bilangan tersebut adalah

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 1000$$

yang dapat ditulis sebagai

$$2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, \ldots, 2 \times 500$$

Jadi, ada sebanyak 500 bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 2. Kini kita perhatikan $n(A \cap B)$, yaitu banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 dan 2, atau banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 6. Kita telah menghitung banyaknya bilangan-bilangan ini, yaitu 166. Jadi, banyaknya bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 3 atau 2 adalah

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 333 + 500 - 166 \\ &= 667 \end{aligned}$$

Para pembaca dapat mengembangkan hal ini untuk penggunaan prinsip inklusi-eksklusi untuk tiga himpunan.

Soal

5.20 Berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 1000 yang habis dibagi 4?

5.21 Berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 800 yang bersisa 1 jika dibagi 3?

5.22 Berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 700 yang habis dibagi 4 dan 7?

5.23 Berapa banyak bilangan asli dari 1 hingga 500 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5?

5.24 Berapa banyak bilangan asli dari 100 hingga 600 yang habis dibagi 2 atau 5?

5.25 Berapa banyak bilangan asli dari 200 hingga 700 yang tidak habis dibagi 2 maupun 3?

5.26 Berapa banyak bilangan asli dari 300 hingga 700 yang bersisa 1 jika dibagi 3 atau bersisa 3 jika dibagi 4?

5.27 Berapa banyak bilangan asli dari 200 hingga 500 yang habis dibagi 2, 3, atau 5?

5.28 Berapa banyak bilangan asli dari 100 hingga 300 yang tidak habis dibagi 3, 4, maupun 5?

5.2 Pengertian Barisan dan Deret

Semua pola bilangan yang telah kita jumpai dalam pembahasan di atas merupakan *barisan*. Ciri dari barisan yang membedakan dengan deret adalah bahwa setiap suku barisan dipisahkan dengan tanda koma. *Deret* merupakan hasil penjumlahan dari suku-suku yang ada dalam barisan, sehingga setiap sukunya dipisahkan dengan tanda "+". Misalkan kita memiliki barisan

$$1, 2, 3, \ldots, 100$$

Maka yang disebut deret adalah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Kita mengenal dua macam barisan dan deret khusus, yaitu barisan dan deret aritmetika serta barisan dan deret geometri. Perhatikan beberapa deret berikut.

(1) $1 + 2 + 3 + \dots + 2011$

(2) $25 + 23 + 21 + \dots + 3$

(3) $2 + 4 + 8 + \dots + 256$

(4) $729 + (-243) + 81 + \dots + 1$

Deret (1) kita bentuk dengan menambahkan setiap suku sebelumnya dengan 1, sedangkan deret (2) kita bentuk dengan menambahkan setiap suku sebelumnya dengan -2. Deret bilangan yang setiap sukunya diperoleh dengan *menjumlahkan* suku sebelumnya dengan sebuah bilangan konstan disebut *deret aritmetika*. Bilangan konstan ini disebut *beda*. Jadi, deret (1) adalah deret aritmetika dengan beda 1, sedangkan deret (2) adalah deret aritmetika dengan beda -2.

Deret (3) kita bentuk dengan mengalikan setiap suku sebelumnya dengan 2, sedangkan deret (4) kita bentuk dengan mengalikan setiap suku sebelumnya dengan $-\frac{1}{3}$. Deret bilangan yang setiap sukunya diperoleh dengan *mengalikan* suku sebelumnya dengan sebuah bilangan konstan disebut *deret geometri*. Bilangan konstan ini disebut *rasio*. Jadi, deret (3) adalah deret geometri dengan rasio 2, sedangkan deret (4) adalah deret geometri dengan rasio $-\frac{1}{3}$.

Kini marilah kita perhatikan kembali deret (2), yaitu

$$25 + 23 + 21 + \dots + 3$$

Jika kita nyatakan setiap suku deret ini dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya, diperoleh

$$(27 - 2 \times 1) + (27 - 2 \times 2) + (27 - 2 \times 3) + \dots + (27 - 2 \times 12)$$

Di sini kita melihat bahwa $(27 - 2 \times 1)$ adalah suku ke-1, $(27 - 2 \times 2)$ adalah suku ke-2, $(27 - 2 \times 3)$ adalah suku ke-3, dan seterusnya sampai dengan $(27 - 2 \times 12)$ adalah suku ke-12. Secara umum, suku ke-k adalah $27 - 2k$, dengan k bernilai 1, 2, 3, sampai dengan 12. Kita memperkenalkan

suatu notasi singkat untuk menuliskan deret ini, yaitu dengan *notasi sigma*. Dengan notasi sigma, deret ini bisa tulis

$$\sum_{k=1}^{12}(27-2k)$$

Penulisan ini menyatakan hasil penjumlahan deret yang suku ke-k nya adalah $27 - 2k$ dari $k = 1$ hingga $k = 12$. Di sini, 1 disebut *batas bawah* dan 12 disebut *batas atas*. Perlu diingat bahwa batas bawah notasi sigma tidak selalu 1. Sebagai ilustrasi, kita juga bisa menuliskan deret tersebut menjadi

$$(23-2\times(-1))+(23-2\times 0)+(23-2\times 1)+\ldots+(23-2\times 10)=\sum_{k=-1}^{10}(23-2k)$$

Keuntungan penulisan suatu deret dengan notasi sigma ini adalah deret dapat ditulis dengan lebih singkat dan lebih mudah untuk digabung-gabungkan ataupun dioperasikan sesuai sifat-sifatnya.

Sifat notasi sigma yang terpenting adalah kelineararannya. Kita perhatikan bahwa

$$(U_1 \pm V_1)+(U_2 \pm V_2)+\ldots+(U_n \pm V_n)=(U_1+U_2+\ldots+U_n)\pm(V_1+V_2+\ldots+V_n)$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{k=1}^{n}(U_k \pm V_k)=\sum_{k=1}^{n}U_k \pm \sum_{k=1}^{n}V_k$$

Selain itu, kita perhatikan pula bahwa

$$cU_1 + cU_2 + \ldots + cU_n = c(U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{k=1}^{n}cU_k = c\sum_{k=1}^{n}U_k$$

untuk sembarang konstanta c.

Pada pembahasan selanjutnya kita akan melihat bagaimana kita dapat menghitung hasil penjumlahan dari deret aritmetika dan geometri.

5.3 Teknik Menjumlahkan Deret Aritmetika

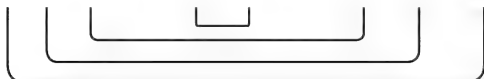
Salah satu contoh deret aritmetika yang telah kita kenal adalah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Deret ini merupakan deret aritmetika berbeda 1.

Dalam bab ketiga pada contoh 3.4.6.1 kita menjumlahkannya dengan memandangnya sebagai berikut.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$

$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{\text{sebanyak } 50}$

$= 50 \times 101$

$= 5050$

Ada suatu cerita terkenal tentang seorang matematikawan asal Jerman bernama Carl Friedrich Gauss (1777–1855) yang menjadi penemu teknik penjumlahan ini.

Ketika Gauss yang masih berumur 10 tahun duduk di bangku Sekolah Dasar, gurunya menghukum semua siswa di kelasnya untuk menghitung jumlah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Jumlah ini tentu terlihat sangat merepotkan bagi kebanyakan siswa Sekolah Dasar. Berangkat dari pemikian inilah justru Gauss kecil berusaha mencari cara yang lain untuk mempercepat penghitungan tersebut.

Sementara teman-temannya menghitung jumlah ini satu demi satu, Gauss berpikir keras dan ternyata dalam waktu singkat ia menemukan cara tersebut dan tanpa keraguan menjawabnya 5050. Jalan berpikir Gauss kecil adalah sebagai berikut.

1. Setiap bilangan memiliki pasangan yang jumlahnya 101.
2. Karena terdapat 100 bilangan yang akan dijumlahkan, maka akan ada 50 pasang bilangan yang berjumlah 101.
3. Jadi, jumlah dari bilangan-bilangan ini sama dengan

$$50 \times 101 = 5050$$

Karena ditemukan oleh Gauss, teknik penjumlahan ini selanjutnya disebut *teknik penjumlahan Gauss*.

Selanjutnya bagaimana jika banyaknya bilangan yang dijumlahkan bukan merupakan bilangan genap? Jika banyaknya bilangan yang dijumlahkan bukan merupakan bilangan genap, tentu ada satu bilangan yang tidak berpasangan. Oleh sebab itu teknik penjumlahan Gauss dikembangkan menjadi sebagai berikut.

Kita misalkan

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

Kemudian kita tuliskan kembali S yang sama tetapi dengan urutan terbalik.

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Jumlah dari dua persamaan ini adalah

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{100} = 100 \times 101$$

Akibatnya,

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Keuntungan dari pengembangan ini adalah bahwa metode ini tidak terpengaruh oleh banyaknya bilangan yang dijumlahkan, apakah itu sebanyak genap atau ganjil.

5.4 Teknik Menjumlahkan Deret Geometri

Suatu contoh deret geometri adalah

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 256$$

Deret ini merupakan deret geometri dengan rasio 2, dan dapat kita tuliskan sebagai

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8$$

Untuk mencari cara menghitung jumlah dari deret ini, marilah kita perhatikan bahwa deret ini dapat kita tuliskan sebagai

$$2(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^7)$$

Apakah hubungan antara deret $1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^7$ ini dengan deret mula-mula? Tentu deret ini sama dengan deret mula-mula, namun suku 2^8 di akhir diganti dengan 1 di awal. Maka dapat kita tuliskan

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^7)$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2(S - 2^8 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2S - 2^9 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2^9 - 2 = 510$$

Cara lain untuk memandang hal ini adalah sebagai berikut.

Kita misalkan

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8$$

Jika kita kalikan kedua ruas dengan rasionya, yaitu 2, maka kita memperoleh

$$2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^9$$

Kemudian kita kurangi persamaan ini dengan persamaan semula, sehingga kita peroleh

$$S = 2^9 - 2 = 510$$

5.5 Teknik Menjumlahkan Deret Aritmetika-Geometri

Dari pembahasan di atas kita dapat menarik kesimpulan bahwa deret aritmetika dan geometri dapat dicari jumlahnya dengan memisalkannya sebagai suatu variabel. Jika deret tersebut merupakan deret aritmetika, maka buatlah deret baru dengan membalik urutan suku-sukunya, kemudian jumlahkan deret baru tersebut dengan deret semula. Jika deret tersebut merupakan deret geometri, buatlah deret baru dengan mengalikannya dengan rasionya, kemudian kurangkan deret baru tersebut dengan deret semula.

Dalam pembahasan selanjutnya kita tidak hanya menemui deret aritmetika atau geometri biasa, tetapi nantinya kita akan menemui pula deret aritmetika-geometri serta deret aritmetika bertingkat, yang akan dibahas pada bagian-bagian berikutnya.

Contoh deret aritmetika-geometri adalah sebagai berikut.

$$1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + 7 \times 3^4 + \ldots + (2n - 1) \times 3^n$$

Kita perhatikan bahwa setiap suku dari deret ini merupakan hasil kali dari suku-suku yang membentuk deret aritmetika dan geometri.

Misalkan kita ingin menentukan jumlah dari deret ini, maka kita memisalkannya sebagai suatu variabel,

$$S = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + 7 \times 3^4 + \ldots + (2n - 1) \times 3^n$$

Kemudian jika kita mengalikan kedua ruas dengan "rasio"nya yaitu 3, kita memperoleh

$$3S = 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + 7 \times 3^5 + \ldots + (2n - 1) \times 3^{n+1}$$

Kemudian kita kurangi persamaan ini dengan persamaan semula dan kita memperoleh

$$\begin{array}{rl} S = & 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + 7 \times 3^4 + \ldots + (2n - 1) \times 3^n \\ 3S = & \quad\quad 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + 7 \times 3^5 + \ldots + (2n - 1) \times 3^{n+1} \quad - \\ \hline -2S = & 1 \times 3 + (2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + \ldots + 2 \times 3^n) - (2n - 1) \times 3^{n+1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -2S = 1 \times 3 + 2(3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^n) - (2n - 1) \times 3^{n+1}$$

Kita perhatikan bahwa $3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^n$ merupakan deret geometri. Untuk menghitung jumlahnya, kita misalkan

$$T = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^n$$

Jika kita kalikan dengan rasionya yaitu 3,

$$3T = 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{n+1}$$

Selisih persamaan ini dengan persamaan sebelumnya adalah

$$2T = 3^{n+1} - 3^2$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 3^2\right)$$

Jadi, untuk deret di atas kita memperoleh

$$-2S = 1 \times 3 + 2 \times \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 3^2\right) - (2n - 1) \times 3^{n+1}$$

$$= 3 + 3^{n+1} - 9 - (2n - 1) \times 3^{n+1}$$

$$= -6 + 2(1 - n)3^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 3 + (n - 1)\, 3^{n+1}$$

5.6 Deret Bilangan-bilangan Asli Berpangkat

Hal lain yang menarik adalah penjumlahan dari bilangan-bilangan asli berpangkat, seperti

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2011^3$$

Jumlah bilangan-bilangan asli berpangkat seperti ini sering ditemui dalam menghitung jumlah deret-deret bilangan. Pada bagian ini kita akan

menurunkan formula-formula jumlah dari deret bilangan asli berpangkat, yang selanjutnya dapat kita gunakan dalam menghitung jumlah deret-deret bilangan.

Kini kita akan mencari formula jumlah bilangan-bilangan asli berpangkat yang secara umum berbentuk

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

dengan k dan n merupakan bilangan asli.

1. Untuk $k = 1$, bentuk penjumlahan ini adalah

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan jumlah ini, salah satunya adalah teknik Gauss di atas. Namun kita akan menggunakan suatu metode yang nantinya dapat pula digunakan untuk menentukan jumlah untuk $k = 2$, $k = 3$, dan seterusnya. Untuk itu, perhatikanlah identitas berikut ini.

$$(i + 1)^2 = i^2 + 2i + 1$$

Jika kita substitusikan nilai $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ maka kita memperoleh n persamaan, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + 2(1) + 1 \\ 3^2 &= 2^2 + 2(2) + 1 \\ 4^2 &= 3^2 + 2(3) + 1 \\ 5^2 &= 4^2 + 2(4) + 1 \\ &\vdots \\ (n + 1)^2 &= n^2 + 2(n) + 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah kita jumlahkan semua persamaan tersebut. Perhatikan bahwa suku-suku 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, dan seterusnya hingga n^2 akan saling menghapuskan di ruas kiri dan kanan, hasilnya adalah

$$\begin{aligned} & (n + 1)^2 = 1^2 + 2(1) + 2(2) + 2(3) + \ldots + 2(n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n} \\ \Leftrightarrow\quad & (n + 1)^2 = 1 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \times 1 \\ \Leftrightarrow\quad & n^2 + 2n + 1 = 1 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \\ \Leftrightarrow\quad & n^2 + n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2}n(n + 1) \end{aligned}$$

Jadi, telah kita peroleh bahwa

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

2. Untuk $k = 2$, bentuk penjumlahan ini adalah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Dengan metode yang sama, kali ini perhatikan identitas

$$(i + 1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

Jika kita substitusikan nilai $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ maka kita memperoleh n persamaan, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3(1^2) + 3(1) + 1\\
3^3 &= 2^3 + 3(2^2) + 3(2) + 1\\
4^3 &= 3^3 + 3(3^2) + 3(3) + 1\\
5^2 &= 4^3 + 3(4^2) + 3(4) + 1\\
&\vdots\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3(n^2) + 3(n) + 1
\end{aligned}$$

Jumlahkan semua persamaan ini dengan memerhatikan bahwa suku-suku 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, dan seterusnya hingga n^3 saling menghapuskan di ruas kiri dan kanan, dan hasilnya adalah

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 = {} & 1^3 + 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + 3(1+2+3+\ldots+n)\\
& + \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}
\end{aligned}$$

Karena sudah kita peroleh bahwa $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$, maka kita substitusikan:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 = {} & 1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3\times\frac{1}{2}n(n+1)\\
& + n\times 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^3+3n^2+3n+1 = 1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+n$$

$$\Leftrightarrow \quad n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

$$\Leftrightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Jadi, telah kita peroleh bahwa

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

3. Untuk $k = 3, 4, 5, \ldots$ dapat kita turunkan dengan cara yang sama seperti di atas, dengan menggunakan identitas-identitas

$$(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$$
$$(i+1)^5 = i^5 + 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$$
$$(i+1)^6 = i^6 + 6i^5 + 15i^4 + 20i^3 + 15i^2 + 6i + 1$$

dan seterusnya.

Hasil-hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut (sampai dengan $k = 10$).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$$

$$1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

$$1^8 + 2^8 + 3^8 + \ldots + n^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$$

$$1^9 + 2^9 + 3^9 + \ldots + n^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2 + n - 1)(2n^4 + 4n^3 - n^2 - 3n + 3)$$

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \ldots + n^{10} = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2 + n - 1)(3n^6 + 9n^5 + 2n^4 - 11n^3 + 3n^2 + 10n - 5)$$

Selanjutnya marilah kita notasikan

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$
$$\vdots$$
$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

Setelah kita menurunkan rumus-rumus ini, kita perhatikan bahwa dalam menurunkan rumus penjumlahan untuk nilai k tertentu ternyata diperlukan hasil sebelumnya, sebagai contoh ketika menentukan S_2 diperlukan hasil S_1, ketika menghitung S_3 diperlukan hasil S_2 dan S_1, ketika menghitung S_4 diperlukan hasil S_3, S_2, dan S_1, demikian seterusnya. Dari sini muncul pertanyaan, dapatkah kita menentukan jumlah secara umum dari

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

dengan k adalah bilangan asli?

Perhatikanlah bahwa menurut teorema binomial yang ada dalam subbab 2.8.2, kita dapat menjabarkan bentuk $(i + 1)^{k+1}$ menjadi sebagai berikut.

$$(i+1)^{k+1} = i^{k+1} + \binom{k+1}{1} i^k + \binom{k+1}{2} i^{k-1} + \ldots + 1$$

Dengan menyubstitusikan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ diperoleh n persamaan yaitu

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \ldots + 1$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + \binom{k+1}{1} 2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \ldots + 1$$

$$4^{k+1} = 3^{k+1} + \binom{k+1}{1} 3^k + \binom{k+1}{2} 3^{k-1} + \ldots + 1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + 1$$

Jumlah dari semua persamaan ini adalah

$$(n + 1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \ldots + n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n + 1)^{k+1} = 1 + (k+1)S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \ldots + n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n + 1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \ldots + n$$

$$\Leftrightarrow \quad (k + 1)S_k = (n+1)^{k+1} - 1 - \binom{k+1}{2} S_{k-1} - \ldots - n$$

$$\Leftrightarrow \quad S_k = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - 1 - \binom{k+1}{2} S_{k-1} - \ldots - n\right]$$

Dari persamaan ini kita dapat menentukan nilai S_k dengan k adalah bilangan asli tertentu, dengan memerlukan hasil dari S_{k-1}, S_{k-2}, ..., dan S_1.

Tetapi untuk selanjutnya tiga persamaan paling sering kita gunakan adalah

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

dan bila kita perhatikan dengan cermat, kita memperoleh pula suatu hubungan yang istimewa, yaitu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

5.7 Barisan Aritmetika Bertingkat

Sebagai pengantar, misalkan kita diberikan soal yang meminta kita menentukan dua suku selanjutnya dari pola-pola berikut.

1. 5, 8, 11, 14, 17, __, __
2. 3, 6, 12, 24, 48, __, __
3. 1, 2, 4, 7, 11, __, __

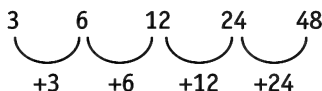
Untuk mengerjakan soal ini, tentu proses berpikir kita yang pertama adalah memerhatikan selisih dari setiap suku pada pola-pola tersebut. Jika tidak diperoleh selisih yang tetap, biasanya kita memerhatikan perbandingan dari setiap sukunya. Perhatikanlah pembahasan berikut.

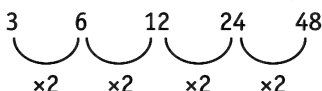
1. 5, 8, 11, 14, 17, __, __

   Pertama-tama, kita mencoba memerhatikan selisih dari setiap sukunya, yaitu dengan cara sebagai berikut.

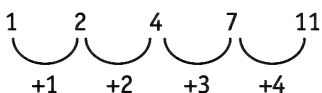
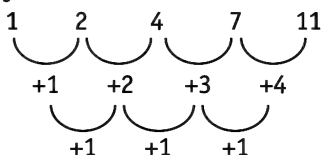
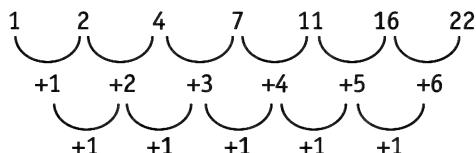
   Ternyata diperoleh selisih yang tetap yaitu 3, maka dengan mudah kita memperoleh dua suku selanjutnya adalah 20 dan 23.

2. 3, 6, 12, 24, 48, ___, ___

Pertama-tama, kita mencoba memerhatikan selisih dari setiap sukunya, dengan cara yang sama.

Perhatikanlah bahwa selisih dari setiap sukunya tidak tetap, melainkan kembali ke barisan semula. Oleh sebab itu jika hal ini kita teruskan, kita tidak akan pernah memperoleh selisih yang tetap.

Maka kini kita mencoba memerhatikan perbandingan dari setiap sukunya.

Ternyata diperoleh pembanding yang tetap yaitu 2, maka dengan mudah kita memperoleh dua suku selanjutnya adalah 96 dan 192.

3. 1, 2, 4, 7, 11, ___, ___

Pertama-tama, kita mencoba memerhatikan selisih dari setiap sukunya, dengan cara yang sama.

Ternyata selisih dari setiap sukunya juga tidak tetap. Namun, perhatikanlah bahwa selisih dari selisih setiap suku ini tetap. Kita dapat meneruskan ini menjadi

Ternyata diperoleh selisih dari selisih yang tetap, yaitu 1. Maka dua suku selanjutnya diperoleh dengan cara meneruskannya.

Jadi, dua suku selanjutnya dari pola ini adalah 16 dan 22.

Perhatikan kembali ketiga contoh barisan di atas. Kita telah mengetahui bahwa barisan pertama merupakan barisan aritmetika, sedangkan barisan kedua merupakan barisan geometri, maka apakah nama dari barisan ketiga?

Barisan seperti barisan ketiga ini disebut *barisan aritmetika bertingkat*, sebab selisih dari setiap sukunyalah yang membentuk barisan aritmetika.

Barisan aritmetika biasa seperti 5, 8, 11, 14, 17 juga termasuk barisan aritmetika bertingkat, yaitu *barisan aritmetika tingkat satu*, sedangkan barisan 1, 2, 4, 7, 11 merupakan *barisan aritmetika tingkat dua*. Selengkapnya perhatikanlah contoh berikut. U_n menyatakan nilai suku ke-n dari barisan bilangan.

1. $U_n = 3n + 1$

   U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6

   4 7 10 13 16 19

   3 3 3 3 3

   Barisan ini merupakan *barisan aritmetika tingkat satu*.

2. $U_n = 2n^2 - n + 4$

   U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6

   5 10 19 32 49 70

   5 9 13 17 21

   4 4 4 4

   Barisan ini merupakan *barisan aritmetika tingkat dua*.

3. $U_n = n^3 - 3n^2 + 4n + 1$

   U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6

   1 3 11 31 69 131

   2 8 20 38 62

   6 12 18 24

   6 6 6

   Barisan ini merupakan *barisan aritmetika tingkat tiga*.

Demikian seterusnya. Secara umum,

Jika U_n menyatakan suku ke-n suatu barisan bilangan dan $U_n = f(n)$ dengan f adalah fungsi berbentuk polinomial dalam variabel n dengan derajat (pangkat tertinggi) k, maka $\{U_n\}$ adalah barisan aritmetika bertingkat k.

Kita dapat menuliskan bentuk umum dari barisan-barisan tersebut.

1. Barisan aritmetika tingkat satu, $U_n = an + b$

$$\begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ a+b & 2a+b & 3a+b & 4a+b \end{array}$$

Selisih: a, a, a

2. Barisan aritmetika tingkat dua, $U_n = an^2 + bn + c$

$$\begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ a+b+c & 4a+2b+c & 9a+3b+c & 16a+4b+c \end{array}$$

Selisih tingkat pertama: $3a + b$, $5a + b$, $7a + b$

Selisih tingkat kedua: $2a$, $2a$

3. Barisan aritmetika tingkat tiga, $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$$\begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ a+b+c+d & 8a+4b+2c+d & 27a+9b+3c+d & 64a+16b+4c+d \end{array}$$

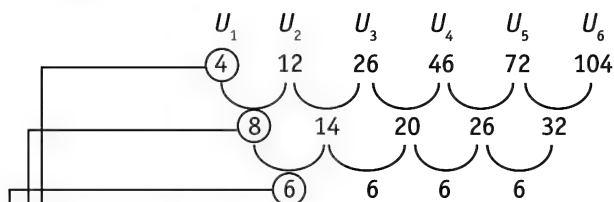
Selisih tingkat pertama: $7a + 3b + c$, $19a + 5b + c$, $37a + 7b + c$

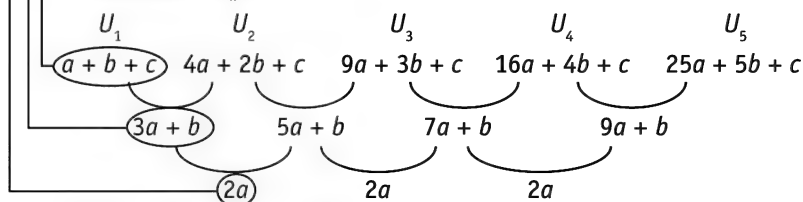
Selisih tingkat kedua: $12a + 2b$, $18a + 2b$

Selisih tingkat ketiga: $6a$

Sebagai contoh penggunaan, misalkan kita akan menentukan rumus suku ke-n dari barisan aritmetika bertingkat berikut.

4, 12, 26, 46, 72, 104, ...

Mula-mula kita buat:

Maka barisan tersebut adalah barisan aritmetika tingkat dua.

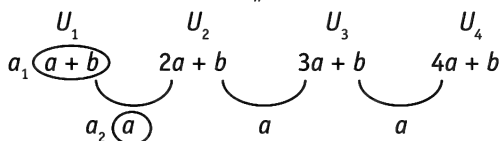
Kita misalkan $U_n = an^2 + bn + c$, maka menurut bentuk di atas:

Sehingga kita memperoleh

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 3a + b = 8 \\ 2a = 6 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini akan didapatkan $a = 3$, $b = -1$, dan $c = 2$.

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 3n^2 - n + 2$.

Selanjutnya kita akan mencoba menurunkan suatu rumus umum untuk suku ke-n dari barisan-barisan tersebut.

1. Barisan aritmetika tingkat satu, $U_n = an + b$

Jika suku pertama dari barisan pertama kita misalkan a_1 dan suku pertama dari barisan kedua kita misalkan a_2, maka diperoleh

$$\begin{cases} a + b = a_1 \\ a = a_2 \end{cases}$$

Jawab dari sistem persamaan ini adalah $a = a_2$ dan $b = a_1 - a_2$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} U_n &= an + b \\ &= (a_2)n + (a_1 - a_2) \\ &= a_1 + (n - 1)a_2 \end{aligned}$$

2. Barisan aritmetika tingkat dua, $U_n = an^2 + bn + c$

Jika suku pertama dari barisan pertama kita misalkan a_1, suku pertama dari barisan kedua kita misalkan a_2, dan suku pertama dari barisan ketiga kita misalkan a_3, maka diperoleh

$$\begin{cases} a + b + c = a_1 \\ 3a + b = a_2 \\ 2a = a_3 \end{cases}$$

Jawab dari sistem persamaan ini adalah $a = \frac{1}{2}a_3, b = a_2 - \frac{3}{2}a_3$, dan $c = a_1 - a_2 + a_3$.

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} U_n &= an^2 + bn + c \\ &= \left(\frac{1}{2}a_3\right)n^2 + \left(a_2 - \frac{3}{2}a_3\right)n + (a_1 - a_2 + a_3) \\ &= \frac{1}{2}a_3n^2 + a_2n - \frac{3}{2}a_3n + a_1 - a_2 + a_3 \\ &= a_1 + (n-1)a_2 + \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1\right)a_3 \\ &= a_1 + (n-1)a_2 + (n-1)(n-2)\frac{a_3}{2} \end{aligned}$$

3. Jika kita melakukan hal yang sama untuk barisan aritmetika tingkat tiga dan seterusnya, kita akan memperoleh pola sebagai berikut.

a. Barisan aritmetika tingkat satu

$U_n = a_1 + (n - 1)a_2$

b. Barisan aritmetika tingkat dua

$$U_n = a_1 + (n-1)a_2 + (n-1)(n-2)\frac{a_3}{2!}$$

c. Barisan aritmetika tingkat tiga

$$U_n = a_1 + (n-1)a_2 + (n-1)(n-2)\frac{a_3}{2!} + (n-1)(n-2)(n-3)\frac{a_4}{3!}$$

d. Barisan aritmetika tingkat empat

$$U_n = a_1 + (n-1)a_2 + (n-1)(n-2)\frac{a_3}{2!} + (n-1)(n-2)(n-3)\frac{a_4}{3!}$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\frac{a_5}{4!}$$

dan seterusnya.

Secara umum untuk barisan aritmetika tingkat k dapat ditulis

$$U_n = a_1 + \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{i}(n-j)\right)\frac{a_{i+1}}{i!}$$

Tentu saja penulisan ini bukan untuk membingungkan kita. Untuk mengingatnya, kita cukup melihat pola yang telah kita peroleh di atas. Kita dapat menggunakan pola tersebut untuk mempercepat menentukan rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika bertingkat.

Soal

5.29 a. Temukan pola pada hasil penjumlahan:

1) 1 + 2 + 3 + ... + 10
2) 1 + 2 + 3 + ... + 100
3) 1 + 2 + 3 + ... + 1000
4) 1 + 2 + 3 + ... + 10000
5) 1 + 2 + 3 + ... + 100000

Dari pola yang diperoleh, terkalah hasil dari

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1\underbrace{000\ldots0}_{2011}$$

Lalu buktikanlah.

b. Lakukan hal yang sama untuk menerka dan membuktikan hasil

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 1\underbrace{000\ldots0}_{2011}{}^2$$

5.30 Berapa minimal banyaknya suku deret

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

harus dijumlahkan untuk mendapatkan hasil penjumlahan yang melebihi satu juta?

5.31 Hitunglah

$$11^2 - 1^2 + 12^2 - 2^2 + 13^2 - 3^2 + \ldots + 20^2 - 10^2$$

5.32 Berapakah hasil penjumlahan semua bilangan asli antara 100 dan 300 yang habis dibagi 3 atau 5?

5.33 Berapakah hasil penjumlahan semua bilangan asli antara 200 dan 500 yang habis dibagi 2, 3, atau 5?

5.34 Temukan kesalahan dalam pengerjaan berikut.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + (2+1) + (4+1) + (6+1)\ldots + (2n-1) = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) + \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-2}\right) = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) + n - 2 = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 - n + 2$$

5.35 a. Deret

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d]$$

adalah deret aritmetika dengan suku pertama a dan beda d. Gunakan teknik penjumlahan Gauss untuk membuktikan bahwa jumlah deret ini adalah

$$\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

b. Deret

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

adalah deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r. Buktikan bahwa jumlah deret ini adalah

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

5.36 Deret-deret berikut merupakan deret aritmetika-geometri. Buktikanlah jumlahnya.

a. $1 + 2r + 3r^2 + \ldots + nr^{n-1} = \dfrac{1 + nr^{n+1} - (n+1)r^n}{(1-r)^2}$

b. $a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \ldots + (a+(n-1)d)r^{n-1}$

$$= a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) + rd\left[\frac{1 - nr^{n-1} + (n-1)r^n}{(1-r)^2}\right]$$

5.37 Hitunglah

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{1023}{1024}$$

5.38 Hitunglah

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{8}} \times 16^{\frac{1}{16}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}}$$

5.39 Hitunglah

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \frac{5}{243} + \frac{8}{729} + \ldots$$

5.40 Hitunglah

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)$$

5.41 Hitunglah

$$1 \times 2 + (1 + 2) \times 3 + (1 + 2 + 3) \times 4 + \ldots + (1 + 2 + \ldots + n) \times (n + 1)$$

5.42 Sederhanakan

$$\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \ldots + n \cdot (2n) \cdot (4n)}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \ldots + n \cdot (3n) \cdot (9n)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

5.43 Hitunglah $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2$ dengan cara sebagai berikut.

a. Kita telah mengetahui bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Hitunglah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$$

b. Hitunglah pula

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots + (2n)^2$$

dengan memerhatikan bahwa

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$$

c. Kurangkan hasil pada butir a dengan hasil pada butir b, untuk mendapatkan hasil yang diminta.

5.44 Dengan cara serupa dengan soal sebelumnya, hitunglah

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3$$

5.45 Tentukan nilai n yang memenuhi

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3} = \frac{199}{242}$$

5.46 Hitunglah

$$a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \ldots + [a + (n - 1)d]^2$$

yaitu jumlah kuadrat dari setiap suku dalam deret aritmetika dengan suku pertama a dan beda d.

Kita dapat melakukannya dengan cara sebagai berikut.

Suku ke-k deret ini dapat kita tulis sebagai

$$U_k = a^2 + 2ad(k - 1) + d^2(k - 1)^2$$

Buatlah n persamaan dengan mensubstitusikan $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ke dalam persamaan ini. Jumlahkan semua persamaan tersebut.

5.47 Dengan cara serupa dengan soal sebelumnya, hitunglah

$$a^3 + (a + d)^3 + (a + 2d)^3 + \ldots + [a + (n - 1)d]^3$$

5.48 Hitunglah

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \ldots + (-1)^{n-1} (2n - 1)^2$$

5.49 Hitunglah

$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)^3$$

5.50 Hitunglah jumlah-jumlah berikut.

a. $\sum_{k=1}^{n} p^k q^{n-k}$

b. $\sum_{k=1}^{n} (ak+b)p^k$

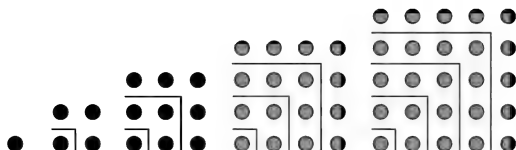
c. $\sum_{k=1}^{n} (ak^2+bk+c)p^k$

5.51 Carilah rumus suku ke-n dari setiap barisan aritmetika bertingkat berikut.

a. 6, 9, 16, 27, 42, 61, ...
b. 5, 5, 11, 29, 65, 125, 215, ...
c. 5, 13, 55, 179, 457, 985, 1883, ...

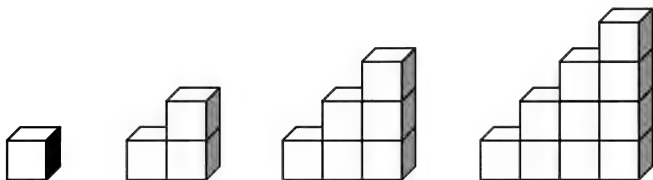
5.52 Bilangan-bilangan berpola dikelompokkan sebagai berikut. Hitunglah hasil penjumlahan bilangan-bilangan dalam kelompok ke-n.

a. (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ...
b. (1), (4, 9), (16, 25, 36), (49, 64, 81, 100), ...

5.53 Perhatikanlah pola titik-titik di bawah ini.

a. Dalam setiap urutan pola, kita dapat menghitung banyaknya titik-titik yang ada dalam dua cara. Cara pertama adalah menjumlahkan banyaknya titik-titik yang dibatasi oleh garis. Cara kedua adalah memerhatikan ukuran persegi. Tuliskan suatu persamaan yang menyatakan banyaknya titik-titik pada pola ke-n yang dihitung dalam dua cara.

b. Gunakan persamaan tadi untuk menghitung

$$2011^2 - 2009^2 + 2007^2 - 2005^2 + \ldots + 3^2 - 1^2$$

5.54 Kubus-kubus satuan disusun seperti pada gambar berikut.

a. Tentukanlah banyaknya kubus satuan yang diperlukan untuk membentuk bangun ke-n.

b. Tentukanlah luas permukaan bangun yang terbentuk pada urutan ke-n.

5.55 Perhatikan pola berikut.

												39				
						19					35		37			
		7			17		15			33		31		29		
1	3		5	9		11		13	21		23		25		27	...

a. Tentukanlah selisih bilangan terbesar dan terkecil dalam segitiga ke-n.

b. Tentukanlah bilangan yang terletak pada puncak segitiga ke-n.

5.56 Perhatikan pola spiral berikut.

26	→	...	...	...	...	...		
↑								
25		10	→	11	→	12	→	13
↑		↑						↓
24		9		2	→	3		14
↑		↑		↑		↓		↓
23		8		1		4		15
↑		↑				↓		↓
22		7	←	6	←	5		16
↑								↓
21	←	20	←	19	←	18	←	17

a. Bilangan yang terletak pada sudut pertama adalah 2. Bilangan yang terletak pada sudut kedua adalah 3. Bilangan yang terletak

pada sudut ketiga adalah 5, dan seterusnya. Tentukan bilangan yang terletak pada sudut ke-100.

b. Kita lihat bahwa bilangan yang terletak di kiri 1 adalah 8 dan bilangan yang terletak di kanan 1 adalah 4. Bilangan apakah yang terletak di kiri dan kanan 60?

5.57 Perhatikan pola berikut.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
	⋮		⋮	⋮		⋮	

Bilangan-bilangan yang membentuk palang di atas memiliki jumlah 55. Bilangan yang menjadi pusat palang ini adalah 11.

a. Jika pola ini dilanjutkan, tentukan jumlah dari bilangan-bilangan yang membentuk palang yang berpusat pada bilangan 75.

b. Carilah bilangan-bilangan yang membentuk palang dengan jumlah 625.

5.58 Bilangan-bilangan ganjil dituliskan membentuk pola berikut. Tentukan bilangan yang terletak pada kotak bertanda "X".

5.59 Jika n adalah bilangan bulat dengan $1 \le n \le 9$, maka hitunglah

$$1 + 22 + 333 + 4444 + \ldots + \underbrace{nnn\ldots n}_{n}$$

5.60 Hitunglah

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3}{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}$$

5.61 Hitunglah

$$\frac{(1\times 2\times 3)+(2\times 3\times 4)+(3\times 4\times 5)+\ldots+(2007\times 2008\times 2009)}{1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+2007^2-2008^2}$$

5.62 Hitunglah

$$\sqrt{1+n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

dengan cara sebagai berikut.

a. Carilah data dari nilai tersebut untuk n = 1, 2, 3, ... hingga diperoleh suatu pola.

b. Terkalah suku ke-n dari pola tersebut.

c. Buktikanlah secara langsung bahwa hasil dari akar tersebut adalah suku ke-n dari pola tersebut.

5.63 Perumuman dari soal sebelumnya.

Perhatikanlah bahwa n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ merupakan bilangan-bilangan yang berurutan. Bentuk ini dapat diperumum menjadi barisan aritmetika. Tentukanlah nilai c (dinyatakan dalam b) agar bentuk

$$c + n(n + b)(n + 2b)(n + 3b)$$

merupakan kuadrat sempurna. Kemudian tentukan hasil dari

$$\sqrt{c+n(n+b)(n+2b)(n+3b)}$$

5.8 Deret Teleskopis

5.8.1 Gagasan Menjumlahkan Deret Teleskopis

Sejauh ini kita telah melihat bagaimana kita dapat menjumlahkan deret-deret bilangan, mulai dari deret aritmetika sederhana, deret geometri, deret aritmetika-geometri, sampai dengan deret aritmetika bertingkat. Namun, tidak semua bentuk deret dapat kita jumlahkan dengan menggunakan teknik-teknik yang telah kita ketahui. Perhatikanlah deret

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}$$

Tentu deret ini bukanlah deret aritmetika maupun deret geometri. Lalu, bagaimana kita dapat menjumlahkan deret ini?

Marilah kita awali dengan mengumpulkan data. Dengan sedikit penghitungan kita dapat memperoleh

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}=\frac{4}{5}$$

Dari data ini, tentu dugaan kita adalah untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Kini tugas kita adalah membuktikan dugaan ini. Kita dapat membuktikan hal ini dengan induksi matematika, tetapi fokus pembicaraan kita kali ini adalah mencari suatu teknik yang baru untuk menjumlahkan deret. Oleh karena itu, kita mencoba membuktikan secara langsung.

Terlebih dahulu kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Kesamaan ini dapat kita gunakan untuk menghitung jumlah deret tadi. Kita mendapatkan

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

dan kita perhatikan bahwa pecahan-pecahan di ruas kanan saling menghapuskan secara beruntun, dan tersisa

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

Sehingga dugaan kita bahwa

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

telah terbukti.

Teknik penjumlahan deret dengan mengubah bentuk suku-sukunya menjadi bentuk yang saling menghapuskan secara beruntun seperti ini disebut *teknik telescoping*. Deret yang jumlahnya dapat ditentukan dengan teknik *telescoping* disebut deret teleskopis.

Secara umum, deret teleskopis adalah deret-deret yang mempunyai rumus suku ke-k yang dapat ditulis dalam bentuk

$$U_k = f(k) - f(k+1)$$

atau

$$U_k = -f(k) + f(k+1)$$

dengan f adalah suatu fungsi dalam variabel k.

Jika $U_k = f(k) - f(k + 1)$, maka jumlah deret tersebut dari $k = 1$ sampai $k = n$ adalah

$$\begin{aligned} S_n &= f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + f(3) - f(4) + \ldots + f(n) - f(n-1) \\ &= 1 - f(n-1) \end{aligned}$$

Sedangkan jika $U_k = -f(k) + f(k + 1)$, maka jumlah deret tersebut dari $k = 1$ sampai $k = n$ adalah

$$\begin{aligned} S_n &= -f(1) + f(2) - f(2) + f(3) - f(3) + f(4) - \ldots - f(n) + f(n-1) \\ &= -1 + f(n-1) \end{aligned}$$

Tetapi hal yang menjadi masalah di sini adalah sebagai berikut. Jika kita lihat kembali ilustrasi di atas, gagasan

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

yang digunakan dalam pembuktian di atas mungkin terkesan terlalu mengada-ada, artinya muncul secara tiba-tiba. Inilah yang menjadi tantangan dalam menghitung jumlah deret yang teleskopis, yaitu bagaimana kita mengubah bentuk suku-suku deret tersebut menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan. Di sini diperlukan pemikiran yang kreatif.

Akan tetapi, ada salah satu metode dalam aljabar yang dapat kita gunakan untuk mengubah bentuk suku-suku deret tersebut, yaitu metode penguraian pecahan parsial. Dalam kalkulus, metode ini kita gunakan dalam menghitung integral dari suatu fungsi rasional.

5.8.2 Penguraian Pecahan Parsial

Kita mulai pembahasan tentang penguraian pecahan parsial dengan memerhatikan kembali deret

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Kita akan mencoba menelusuri gagasan untuk mengubah bentuk suku-suku deret ini menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan. Bentuk suku ke-k dari deret ini adalah

$$U_k=\frac{1}{k(k+1)}$$

tetapi agar U_k saling menghapuskan bila dijumlahkan, maka kita harus mengubahnya menjadi dua suku, yaitu $f(k)$ dan $-f(k+1)$. Untuk itu, upaya yang dapat kita lakukan adalah memecah bentuk

$$\frac{1}{k(k+1)}$$

menjadi dua pecahan. Proses memecah bentuk tersebut menjadi dua pecahan merupakan kebalikan dari proses menyamakan penyebut yang kita lakukan ketika akan menjumlahkan dua pecahan. Oleh karena itu, kita harus dapat menuliskan bentuk ini sebagai

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

dengan A dan B adalah bilangan-bilangan yang harus kita tentukan nilainya. Maka, tugas kita selanjutnya adalah menentukan nilai A dan B ini. Tujuan kita adalah supaya apabila

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

dijumlahkan akan menghasilkan

$$\frac{1}{k(k+1)}$$

Perhatikan bahwa jika kita jumlahkan kedua pecahan tersebut akan diperoleh

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{Ak+A+Bk}{k(k+1)}=\frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

Kita ingin agar hasil penjumlahan ini harus sama dengan

$$\frac{1}{k(k+1)}$$

yaitu

$$\frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$$

Kita perhatikan bahwa penyebut dari kedua pecahan ini sudah sama, maka kita tidak perlu melihatnya lagi. Fokus kita adalah pada pembilang. Kita bandingkan pembilang pada ruas kiri dan pembilang pada ruas kanan. Di ruas kiri, pembilang merupakan polinomial berderajat satu dalam variabel k, sedangkan di ruas kanan kita tidak mempunyai variabel k. Oleh karena itu, koefisien k pada ruas kiri haruslah nol. Maka kita memperoleh

$$A + B = 0$$

Kemudian konstanta pada pembilang di ruas kanan tentu harus sama dengan konstanta pada pembilang di ruas kiri, maka kita memperoleh

$$A = 1$$

Akibatnya diperoleh pula

$$B = -1$$

Jadi, pemisalan kita tadi

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

menjadi

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Dari sinilah gagasan tersebut diperoleh.

Proses yang baru saja kita lakukan adalah menguraikan suatu pecahan menjadi jumlah dari beberapa pecahan bagian yang lebih sederhana. Proses ini disebut penguraian pecahan parsial.

Pada dasarnya ada empat macam penguraian pecahan parsial, yaitu sebagai berikut.

1. **Penguraian pecahan parsial atas faktor-faktor linear berbeda**

Jika suatu pecahan yang akan diuraikan memiliki faktor-faktor linear yang semuanya berbeda, maka pecahan tersebut dapat diuraikan dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{F(k)}{(a_1k+b_1)(a_2k+b_2)\dots(a_nk+b_n)}=\frac{A_1}{a_1k+b_1}+\frac{A_2}{a_2k+b_2}+\dots+\frac{A_n}{a_nk+b_n}$$

dengan A_1, A_2, ..., A_n adalah bilangan-bilangan yang akan ditentukan nilainya. Sebagai contoh

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

$$\frac{k^2-k+2}{(k+5)(2k-1)(3k+4)}=\frac{A}{k+5}+\frac{B}{2k-1}+\frac{C}{3k+4}$$

2. **Penguraian pecahan parsial atas faktor-faktor linear berulang**

Jika suatu pecahan yang akan diuraikan memiliki faktor-faktor linear yang berulang, maka pecahan tersebut dapat diuraikan dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{F(k)}{(ak+b)^n}=\frac{A_1}{ak+b}+\frac{A_2}{(ak+b)^2}+\dots+\frac{A_n}{(ak+b)^n}$$

dengan A_1, A_2, ..., A_n adalah bilangan-bilangan yang akan ditentukan nilainya. Sebagai contoh

$$\frac{k+8}{(2k+1)^3}=\frac{A}{2k+1}+\frac{B}{(2k+1)^2}+\frac{C}{(2k+1)^3}$$

$$\frac{-2k+5}{(k+3)(3k-1)^2}=\frac{A}{k+3}+\frac{B}{3k-1}+\frac{C}{(3k-1)^2}$$

3. **Penguraian pecahan parsial atas faktor-faktor kuadrat berbeda**

Jika suatu pecahan yang akan diuraikan memiliki faktor-faktor kuadrat tak tereduksi yang semuanya berbeda, maka pecahan tersebut dapat diuraikan dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{F(k)}{(ak^2+bk+c)(dk+e)}=\frac{Ak+B}{ak^2+bk+c}+\frac{C}{dk+e}$$

dengan A, B, dan C adalah bilangan-bilangan yang akan ditentukan nilainya. Hal serupa berlaku jika terdapat lebih dari satu faktor kuadrat. Sebagai contoh

$$\frac{k^2-7}{(k^2+k+1)(3k-2)}=\frac{Ak+B}{k^2+k+1}+\frac{C}{3k-2}$$

$$\frac{k^3-k^2+2k-4}{(3k^2+2k+5)(2k^2-k+6)}=\frac{Ak+B}{3k^2+2k+5}+\frac{Ck+D}{2k^2-k+6}$$

4. **Penguraian pecahan parsial atas faktor-faktor kuadrat berulang**

Jika suatu pecahan yang akan diuraikan memiliki faktor-faktor kuadrat tak tereduksi yang berulang, maka pecahan tersebut dapat diuraikan dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{F(k)}{(ak^2+bk+c)^n}=\frac{A_1k+B_1}{ak^2+bk+c}+\frac{A_2k+B_2}{(ak^2+bk+c)^2}+\ldots$$
$$+\frac{A_nk+B_n}{(ak^2+bk+c)^n}$$

dengan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dan $B_1, B_2, \ldots, B_n$ adalah bilangan-bilangan yang akan ditentukan nilainya. Sebagai contoh

$$\frac{-2k^3+1}{(k^2+4)^3}=\frac{Ak+B}{k^2+4}+\frac{Ck+D}{(k^2+4)^2}+\frac{Ek+F}{(k^2+4)^3}$$

$$\frac{4}{(2k^2-k+1)^2(k-1)}=\frac{Ak+B}{2k^2-k+1}+\frac{Ck+D}{(2k^2-k+1)^2}+\frac{E}{k-1}$$

Kini kita akan memerhatikan satu contoh di mana kita menghitung hasil penjumlahan deret teleskopis dengan terlebih dahulu menguraikan bentuk suku-sukunya.

Contoh 5.8.2.1

Hitunglah

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{99\times 101}$$

Jawab

Pertama-tama, kita perhatikan bentuk umum suku ke-k nya. Untuk itu, kita tuliskan setiap sukunya dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya, yaitu

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}+\frac{1}{(2\cdot 2-1)(2\cdot 2+1)}+\frac{1}{(2\cdot 3-1)(2\cdot 3+1)}+\dots$$
$$+\frac{1}{(2\cdot 50-1)(2\cdot 50+1)}$$

Dari sini kita melihat bahwa suku ke-k nya berbentuk

$$U_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Kini kita akan menguraikan bentuk ini menjadi jumlah dari dua pecahan bagian. Karena hanya memuat faktor-faktor linear, kita misalkan

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}$$

dengan A dan B adalah bilangan-bilangan yang harus kita tentukan nilainya. Selanjutnya dengan menyamakan penyebut kedua pecahan di ruas kanan kita memperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}&=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}\\&=\frac{2Ak+A+2Bk-B}{(2k-1)(2k+1)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(2A+2B)k+(A-B)}{(2k-1)(2k+1)}$$

Sehingga dengan menyamakan koefisien pembilang pada kedua ruas kita memperoleh

$$\begin{cases}2A+2B=0\\ A-B=1\end{cases}$$

Kita dapat menyelesaikan sistem persamaan ini, dan diperoleh

$$A=\frac{1}{2}\ \text{dan}\ B=-\frac{1}{2}$$

Jadi,

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{2k-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2k+1}$$

Oleh karena itu, jumlah dari deret di atas dapat kita tuliskan sebagai

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{99\times 101}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1}-\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{\frac{1}{2}}{5}+\frac{\frac{1}{2}}{5}-\frac{\frac{1}{2}}{7}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}}{99}-\frac{\frac{1}{2}}{101}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1}-\frac{\frac{1}{2}}{101}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)$$

$$=\frac{50}{101}$$

Jadi,

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{99\times 101}=\frac{50}{101}$$

Perlu diingat bahwa tidak semua deret teleskopis yang akan kita jumlahkan mempunyai bentuk pecahan yang dapat diuraikan. Jika bentuk dari sukunya bukan berupa pecahan yang dapat diuraikan, maka kita harus berpikir dengan cara yang lain untuk mengubahnya menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan. Para pembaca dapat mencoba beberapa soal berikut.

Soal

5.64 Hitunglah

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

5.65 Hitunglah

$$\frac{1}{9\cdot 1^2+3\cdot 1-2}+\frac{1}{9\cdot 2^2+3\cdot 2-2}+\frac{1}{9\cdot 3^2+3\cdot 3-2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{9\cdot 100^2+3\cdot 100-2}$$

5.66 Hitunglah

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+100}$$

5.67 Hitunglah

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

5.8.3 Beberapa Contoh Permasalahan

Kita telah melihat gagasan menjumlahkan suatu deret dengan mengubah bentuk suku-sukunya menjadi bentuk yang saling menghapuskan satu sama lain bila dijumlahkan. Setelah mengerjakan beberapa soal di atas, kita juga melihat beberapa cara mengubah bentuk suku deret tersebut. Kita juga melihat bahwa teknik *telescoping* ternyata juga muncul di perkalian, misalnya dalam soal 5.67. Untuk *telescoping* perkalian, kita harus dapat mengubah bentuk suku-suku perkalian itu menjadi

$$U_k=\frac{f(k)}{f(k+1)}\rightarrow P_n=\frac{f(1)}{f(2)}\times\frac{f(2)}{f(3)}\times\frac{f(3)}{f(4)}\times\ldots\times\frac{f(n)}{f(n+1)}=\frac{f(1)}{f(n+1)}$$

atau

$$U_k=\frac{f(k+1)}{f(k)}\rightarrow P_n=\frac{f(2)}{f(1)}\times\frac{f(3)}{f(2)}\times\frac{f(4)}{f(3)}\times\ldots\times\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(n+1)}{f(1)}$$

Pada bagian ini akan diberikan beberapa contoh permasalahan lain di mana *teknik telescoping* dapat kita gunakan.

Contoh 5.8.3.1

Hitunglah

$$1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n\times n!$$

Jawab

Kita akan berusaha mengubah bentuk suku ke-k nya menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan. Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k\times k! &= [(k+1)-1]\times k! \\ &= (k+1)\times k! - k! \end{aligned}$$

$$= (k + 1)! - k!$$
$$= -k! + (k + 1)!$$

Sehingga jumlah deret tersebut adalah

$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n!$

$= -1! + 2! - 2! + 3! - 3! + 4! - \dots - n! + (n + 1)!$

$= -1! + (n + 1)!$

$= (n + 1)! - 1$

Para pembaca dapat mencoba menjumlahkan beberapa deret lain berikut dengan gagasan serupa.

Soal

5.68 Hitunglah

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$$

5.69 Hitunglah

$(1^2 + 1 + 1)1! + (2^2 + 2 + 2)2! + (3^2 + 3 + 3)3! + \dots + (n^2 + n + 1)n!$

Petunjuk: Gunakan $k^2 + k + 1 = (k + 1)^2 - k$.

5.70 Hitunglah

$$\frac{1 \times 2!}{2} + \frac{2 \times 3!}{2^2} + \frac{3 \times 4!}{2^3} + \dots + \frac{n \times (n+1)!}{2^n}$$

5.71 Hitunglah

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \dots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

Petunjuk: Perhatikan bahwa

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$
$$= \frac{k+2}{(k+2)!\left[\frac{1}{(k+2)(k+1)} + \frac{1}{k+2} + 1\right]}$$

$$= \frac{k+2}{(k+2)!\left[\frac{k^2+4k+4}{(k+2)(k+1)}\right]}$$

$$= \frac{k+1}{(k+2)!}$$

selanjutnya seperti soal 5.68.

Berikut adalah contoh-contoh yang lain.

Contoh 5.8.3.2

Hitunglah

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Jawab

Kita dapat menguraikan bentuk suku ke-k nya menjadi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$$

dengan A, B, C bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Dengan menyamakan penyebut pada ruas kanan kita memperoleh

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{Ak^2+3Ak+2A+Bk^2+2Bk+Ck^2+Ck}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(A+B+C)k^2+(3A+2B+C)k+2A}{k(k+1)(k+2)}$$

Maka dengan menyamakan koefisien setiap suku pada pembilang di kedua ruas kita memperoleh

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

Sistem persamaan ini dapat kita selesaikan dengan mudah sehingga didapat $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, dan $C=\frac{1}{2}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{k+1}\right)+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right)+\left(-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

Sehingga jumlah deret tersebut adalah

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}-\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)+\left(-\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{2}}{4}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{\frac{1}{2}}{4}\right)+\left(-\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right)$$

$$+\ldots+\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)+\left(-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right)$$

Kita kelompokkan menurut urutan tanda kurung genap dan ganjil sehingga diperoleh

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Contoh 5.8.3.3

Hitunglah

$$\sqrt{-\frac{2}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}}+\sqrt{-\frac{2}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{-\frac{2}{n\cdot(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

Jawab

Kita perhatikan bentuk suku ke-k nya yaitu

$$\begin{aligned}\sqrt{-\frac{2}{k(k+1)^2}+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}} &= \sqrt{\frac{-2k+(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{-2k+(k^2+2k+1)-k^2}{k^2(k+1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{k^2(k+1)^2}}\\ &= \frac{1}{k(k+1)}\\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

Sehingga jumlah deret tersebut adalah

$$\sqrt{-\frac{2}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}}+\sqrt{-\frac{2}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{-\frac{2}{n\cdot(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

Contoh 5.8.3.4

Hitunglah

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa bentuk suku ke-k nya dapat kita tuliskan sebagai

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2+1)^2-k^2}$$
$$= \frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$$

Kita dapat menguraikan pecahan ini menjadi

$$\frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} = \frac{Ak+B}{k^2-k+1} + \frac{Ck+D}{k^2+k+1}$$

dengan A, B, C, D bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Dengan menyamakan penyebut pada ruas kanan kita memperoleh

$$\frac{Ak^3+Ak^2+Ak+Bk^2+Bk+B+Ck^3-Ck^2+Ck+Dk^2-Dk+D}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$$

yang bila dikelompokkan menurut suku-sukunya akan menjadi

$$\frac{(A+C)k^3+(A+B-C+D)k^2+(A+B+C-D)k+(B+D)}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$$

Karena bentuk ini harus menghasilkan

$$\frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$$

maka dengan menyamakan koefisien setiap sukunya kita memperoleh

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=0 \\ A+B+C-D=1 \\ B+D=0 \end{cases}$$

Sistem persamaan ini dapat kita selesaikan dengan mudah sehingga didapat $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$, dan $D = -\frac{1}{2}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{k^2-k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k^2+k+1}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{(k-1)k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k(k+1)+1}$$

maka jumlah deret tersebut adalah

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{0\times1+1}-\frac{\frac{1}{2}}{1\times2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{1\times2+1}-\frac{\frac{1}{2}}{2\times3+1}+\frac{\frac{1}{2}}{2\times3+1}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}}{3\times4+1}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}}{(n-1)n+1}-\frac{\frac{1}{2}}{n(n+1)+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{0\times1+1}-\frac{\frac{1}{2}}{n(n+1)+1}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^2+n+1)}$$

Contoh 5.8.3.5

Jika

$$a_k=\frac{2k+1+\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

dengan k adalah bilangan bulat positif, tentukan $\sum_{k=1}^{n}a_k$.

Jawab

Kita ingin mencari jumlah dari

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

Untuk itu kita akan berusaha mengubah bentuk a_k agar menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan. Kita perhatikan bahwa

$$\frac{2k+1+\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{k+(k+1)+\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2-\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)-\frac{\sqrt{k^2+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\times\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}$$

$$=\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)-\frac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{(-1)}$$

$$= \left(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\right) + k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k}$$
$$= -k\sqrt{k} + (k+1)\sqrt{k+1}$$

Sehingga jumlah deret tersebut adalah

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= -1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{4} - \ldots - n\sqrt{n} + (n+1)\sqrt{n+1}$$
$$= -1\sqrt{1} + (n+1)\sqrt{n+1}$$
$$= (n+1)\sqrt{n+1} - 1$$

Sophie Germain (1776 – 1831) memperkenalkan suatu teknik pemfaktoran istimewa, yaitu untuk setiap bilangan real a dan b berlaku

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= (a^2)^2 + (2b^2)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - 2(a^2)(2b^2) \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \end{aligned}$$

di mana kita menggunakan kesamaan

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

dan

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

Jadi,

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

Bentuk lain dari identitas ini adalah

$$a^4 + \frac{1}{4}b^4 = \left(a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab\right)\left(a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab\right)$$

yang dapat dibuktikan dengan cara serupa.

Contoh berikut memperlihatkan suatu deret teleskopis yang menggunakan teknik pemfaktoran Sophie Germain untuk mengubah bentuk umum sukunya menjadi bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan.

Contoh 5.8.3.6

Hitunglah

$$\frac{4\cdot 1}{1+4\cdot 1^4} + \frac{4\cdot 2}{1+4\cdot 2^4} + \frac{4\cdot 3}{1+4\cdot 3^4} + \ldots + \frac{4n}{1+4n^4}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa bentuk suku ke-k nya dapat kita tuliskan sebagai

$$\frac{4k}{1+4k^4} = \frac{4k}{(1+2k^2-2k)(1+2k^2+2k)}$$
$$= \frac{4k}{(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)}$$

sehingga dengan teknik penguraian pecahan parsial, para pembaca dapat menunjukkan bahwa

$$\frac{4k}{1+4k^4} = \frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}$$

atau bisa ditulis sebagai

$$\frac{4k}{1+4k^4} = \frac{1}{2(k-1)k+1} - \frac{1}{2k(k+1)+1}$$

Maka jumlah deret tersebut adalah

$$\frac{4\cdot 1}{1+4\cdot 1^4} + \frac{4\cdot 2}{1+4\cdot 2^4} + \frac{4\cdot 3}{1+4\cdot 3^4} + \ldots + \frac{4n}{1+4n^4}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 0\cdot 1+1} - \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2+1} + \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2+1} - \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3+1} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3+1}$$
$$- \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4+1} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)n+1} - \frac{1}{2n(n+1)+1}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 0\cdot 1+1} - \frac{1}{2n(n+1)+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Soal-soal berikut menyajikan deret-deret teleskopis dengan berbagai variasi bentuk suku.

Soal

5.72 Hitunglah

$$\frac{1}{1\times 5} + \frac{1}{5\times 9} + \frac{1}{9\times 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

5.73 Hitunglah

$$\binom{3}{3}^{-1}+\binom{4}{3}^{-1}+\binom{5}{3}^{-1}+\ldots+\binom{n+2}{3}^{-1}$$

5.74 Hitunglah

$$\frac{3}{1^2\times 2^2}+\frac{5}{2^2\times 3^2}+\frac{7}{3^2\times 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}$$

5.75 Hitunglah

$$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$$

5.76 Hitunglah

$$\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+\frac{3^2}{5\times 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

5.77 Hitunglah

$$\frac{5}{(1^2+1)\cdot 3}+\frac{7}{(2^2+2)\cdot 3^2}+\frac{9}{(3^2+3)\cdot 3^3}+\ldots+\frac{2n+3}{(n^2+n)\cdot 3^n}$$

5.78 Hitunglah

$$\sqrt{-\frac{4}{1\cdot 3^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}}+\sqrt{-\frac{4}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}}+\ldots+\sqrt{-\frac{4}{(2n-1)(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}}$$

5.79 Hitunglah

$$\frac{2\cdot 1}{1^4+3\cdot 1^2+4}+\frac{2\cdot 2}{2^4+3\cdot 2^2+4}+\frac{2\cdot 3}{3^4+3\cdot 3^2+4}+\ldots+\frac{2n}{n^4+3n^2+4}$$

5.80 Hitunglah

$$\frac{1\cdot 2^1}{3!}+\frac{2\cdot 2^2}{4!}+\frac{3\cdot 2^3}{5!}+\ldots+\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}$$

5.81 Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ merupakan barisan aritmetika dengan beda d, hitunglah:

a. $$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

b. $$\frac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\frac{a_2+a_3}{a_2^2a_3^2}+\frac{a_3+a_4}{a_3^2a_4^2}+\ldots+\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2a_{n+1}^2}$$

dinyatakan dalam a, n, dan d, dengan $a = a_1$.

5.82 Hitunglah

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

5.83 Hitunglah

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

5.84 Hitunglah

$$\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\vdots}}}}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\vdots}}}}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\vdots}}}}+\ldots$$

$$+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n}+\cfrac{\frac{1}{4}}{\vdots}}}}$$

5.85 Hitunglah

$$\frac{1^2+1\cdot 2+2^2}{1^3\cdot 2^3}+\frac{2^2+2\cdot 3+3^2}{2^3\cdot 3^3}+\frac{3^2+3\cdot 4+4^2}{3^3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{n^2+n(n+1)+(n+1)^2}{n^3(n+1)^3}$$

5.86 Hitunglah

$$\frac{2^1}{(1+2^0)(1+2^1)}+\frac{2^2}{(1+2^1)(1+2^2)}+\frac{2^3}{(1+2^2)(1+2^3)}+\ldots+\frac{2^n}{(1+2^{n-1})(1+2^n)}$$

5.87 Dalam subbab sebelumnya kita telah membahas bagaimana menghitung jumlah bilangan-bilangan asli berpangkat. Dengan cara pandang

yang tepat, kita juga dapat menghitung jumlah-jumlah tersebut dengan teknik *telescoping*.

a. Tunjukkan bahwa $k(k+1) - (k-1)k = 2k$. Gunakan hal ini untuk menghitung

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

b. Tunjukkan bahwa $k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2 = 4k^3$. Gunakan hal ini untuk menghitung

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

c. Dari gagasan di atas, carilah suatu identitas yang dapat digunakan untuk menghitung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

lalu hitunglah jumlah tersebut.

5.88 Hitunglah

$$\frac{1^2 - \frac{1}{2}}{1^4 + \frac{1}{4}} + \frac{2^2 - \frac{1}{2}}{2^4 + \frac{1}{4}} + \frac{3^2 - \frac{1}{2}}{3^4 + \frac{1}{4}} + \ldots + \frac{n^2 - \frac{1}{2}}{n^4 + \frac{1}{4}}$$

5.89 Hitunglah

$$\left(1 - \frac{4}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4}{5^2}\right)\ldots\left[1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right]$$

5.90 Hitunglah

$$\left(1 + \frac{2}{1^2 + 3\cdot 1}\right)\left(1 + \frac{2}{2^2 + 3\cdot 2}\right)\left(1 + \frac{2}{3^2 + 3\cdot 3}\right)\ldots\left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n}\right)$$

5.91 Misalkan $T_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$ dan

$$P_k = \frac{T_2}{T_2 - 1} \times \frac{T_3}{T_3 - 1} \times \frac{T_4}{T_4 - 1} \times \ldots \times \frac{T_k}{T_k - 1}$$

untuk $k = 2, 3, 4, \ldots$. Tentukan nilai P_n.

5.92 Perhatikan deret

$$\frac{1}{4} + \frac{1\times 3}{4\times 6} + \frac{1\times 3\times 5}{4\times 6\times 8} + \ldots + \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)}{4\times 6\times 8\times \ldots \times (2n+2)}$$

a. Tulis

$$U_k = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2k-1)}{4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (2k+2)}$$

Tunjukkan bahwa

$$U_k = 2(k+2)U_{k+1} - 2(k+1)U_k$$

b. Gunakan hubungan di atas untuk menghitung jumlah deret tersebut sehingga diperoleh hasil penjumlahan

$$S_k = 1 - 2(n+2)\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (2n+4)}$$

5.93 Hitunglah

$$\frac{(5^4+4) \times (9^4+4) \times (13^4+4) \times \ldots \times \left[(4n+1)^4+4\right]}{(3^4+4) \times (7^4+4) \times (11^4+4) \times \ldots \times \left[(4n-1)^4+4\right]}$$

5.8.4 Perumuman Penjumlahan Deret Pecahan Teleskopis

Sebelumnya pernah dibahas bagaimana kita menjumlahkan dua deret berikut.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Pada bagian ini kita akan mencoba memperumum penjumlahan deret-deret pecahan semacam ini, misalnya

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

dan seterusnya.

Dengan notasi sigma, deret-deret di atas dapat kita tulis sebagai

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Nanti pada kesimpulannya kita akan melihat jumlah dari

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+r)}$$

yaitu jumlah dari deret pecahan yang masing-masing sukunya mempunyai penyebut yang berupa hasil perkalian r + 1 bilangan asli berurutan.

Mula-mula marilah kita terlebih dahulu memerhatikan penguraian pecahan-pecahan tersebut. Sejauh ini kita telah mengetahui bahwa

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

Terlebih dahulu kita akan meneruskan penguraian pecahan-pecahan ini dengan harapan ditemukannya suatu pola.

Sekarang kita misalkan

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3}$$

dengan A, B, C, D bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya.

Dengan menyamakan penyebut pada ruas kanan kita memperoleh

$$\frac{A(k+1)(k+2)(k+3) + Bk(k+2)(k+3) + Ck(k+1)(k+3) + Dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

atau

$$\frac{(k^3+6k^2+11k+6)A + B(k^3+5k^2+6k) + C(k^3+4k^2+3k) + D(k^3+3k^2+2k)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

yang bila dikelompokkan menurut suku-sukunya akan menjadi

$$\frac{(A+B+C+D)k^3 + (6A+5B+4C+3D)k^2 + (11A+6B+3C+2D)k + 6A}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Karena bentuk ini harus menghasilkan

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

maka dengan menyamakan koefisien setiap sukunya kita memperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ 6A+5B+4C+3D=0 \\ 11A+6B+3C+2D=0 \\ 6A=1 \end{cases}$$

yang dipenuhi oleh $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$, dan $D=-\frac{1}{6}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{\frac{1}{6}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}-\frac{\frac{1}{6}}{k+3}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

Dengan cara yang sama kita juga dapat memperoleh

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{k}-\frac{4}{k+1}+\frac{6}{k+2}-\frac{4}{k+3}+\frac{1}{k+4}\right)$$

Apabila kita tuliskan semua yang telah kita ketahui sejauh ini, kita mendapatkan pola yang sangat bagus, yaitu sebagai berikut.

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{k}-\frac{4}{k+1}+\frac{6}{k+2}-\frac{4}{k+3}+\frac{1}{k+4}\right)$$

Pertama, kita melihat bahwa koefisien-koefisien di dalam kurung membentuk pola bilangan-bilangan segitiga Pascal dengan tanda yang berselingan. Kedua, penyebut dari pengali di depannya membentuk pola faktorial. Oleh sebab itu, dugaan kita adalah

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}=\frac{1}{r!}\left[\frac{\binom{r}{0}}{k}-\frac{\binom{r}{1}}{k+1}+\frac{\binom{r}{2}}{k+2}-\ldots+(-1)^r\frac{\binom{r}{r}}{k+r}\right]$$

Kini tentu tugas kita adalah membuktikan dugaan ini. Kita akan menggunakan induksi matematika pada r, untuk $r \geq 1$. Oleh karena itu, sebagai langkah dasar, kita harus membuktikan pernyataan ini benar untuk $r = 1$. Untuk $r = 1$ kita memperoleh

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1!}\left[\frac{\binom{1}{0}}{k} - \frac{\binom{1}{1}}{k+1}\right]$$

yang jelas benar dan sudah pernah kita buktikan pada awal pembahasan tentang deret teleskopis.

Kini kita misalkan pernyataan ini benar untuk $r = p$, dengan $p \geq 1$, yaitu

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)} = \frac{1}{p!}\left[\frac{\binom{p}{0}}{k} - \frac{\binom{p}{1}}{k+1} + \frac{\binom{p}{2}}{k+2} - \ldots + (-1)^p \frac{\binom{p}{p}}{k+p}\right]$$

dan kini kita harus membuktikan kebenaran pernyataan ini untuk $r = p + 1$. Kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p+1)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)(k+p+1)}$$

Berdasarkan hipotesis induksi kita memperoleh

$$= \frac{1}{p!}\left[\frac{\binom{p}{0}}{k} - \frac{\binom{p}{1}}{k+1} + \ldots + (-1)^p \frac{\binom{p}{p}}{k+p}\right]\frac{1}{(k+p+1)}$$

$$= \frac{1}{p!}\left[\frac{\binom{p}{0}}{k(k+p+1)} - \frac{\binom{p}{1}}{(k+1)(k+p+1)} + \ldots + (-1)^p \frac{\binom{p}{p}}{(k+p)(k+p+1)}\right]$$

yang dapat kita tulis dalam notasi sigma menjadi

$$= \frac{1}{p!}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q \frac{\binom{p}{q}}{(k+q)(k+p+1)}$$

Kini kita akan mencoba menguraikan pecahan

$$\frac{\binom{p}{q}}{(k+q)(k+p+1)} = \frac{A}{k+q} + \frac{B}{k+p+1}$$

dengan A dan B bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya.

Dengan menyamakan penyebut pada ruas kanan akan diperoleh

$$\frac{\binom{p}{q}}{(k+q)(k+p+1)} = \frac{Ak + pA + A + Bk + qB}{(k+q)(k+p+1)}$$

$$= \frac{(A+B)k + [(p+1)A + qB]}{(k+q)(k+p+1)}$$

Sehingga kita memperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ (p+1)A + qB = \binom{p}{q} \end{cases}$$

Jawab dari sistem persamaan ini adalah

$$A = \frac{1}{p-q+1}\binom{p}{q}$$

$$B = -\frac{1}{p-q+1}\binom{p}{q}$$

Para pembaca dapat membuktikan dengan aljabar bahwa kedua bentuk ini sama dengan

$$A = \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}$$

$$B = -\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\binom{p}{q}}{(k+q)(k+p+1)} = \frac{\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}}{k+q} - \frac{\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}}{k+p+1}$$

Oleh karena itu, bentuk sigma di atas sama dengan

$$\frac{1}{p!}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left[\frac{\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}}{k+q} - \frac{\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

Karena $\frac{1}{p+1}$ merupakan konstanta, maka sesuai sifat notasi sigma kita memperoleh

$$= \frac{1}{(p+1)p!}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left[\frac{\binom{p+1}{q}}{k+q} - \frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\sum_{q=0}^{p}\left[(-1)^q\frac{\binom{p+1}{q}}{k+q} - (-1)^q\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\sum_{q=0}^{p}\left[(-1)^q\frac{\binom{p+1}{q}}{k+q} + (-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

Sesuai sifat kelinearan notasi sigma kita mendapatkan

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\frac{\binom{p+1}{q}}{k+q} + \sum_{q=0}^{p}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

Kini kita uraikan bentuk sigma pertama sehingga diperoleh

$$=\frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\binom{p+1}{0}}{k}-\frac{\binom{p+1}{1}}{k+1}+\ldots+(-1)^{p}\frac{\binom{p+1}{p}}{k+p}+\sum_{q=0}^{p}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right]$$

Tugas kita sekarang hanya memanipulasi sigma kedua, yaitu

$$\sum_{q=0}^{p}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}$$

Kita akan menambahkan satu suku pada sigma kedua ini, yaitu suku ke-(p + 1). Perhatikan bahwa

$$\sum_{q=0}^{p+1}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}=\sum_{q=0}^{p}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}+\underbrace{(-1)^{(p+1)+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}}_{\text{suku ke-}(p+1)}$$

sehingga

$$\sum_{q=0}^{p}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}=\sum_{q=0}^{p+1}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}+(-1)^{p+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}$$

Kita substitusikan sehingga diperoleh

$$=\frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\binom{p+1}{0}}{k}-\frac{\binom{p+1}{1}}{k+1}+\ldots+(-1)^{p}\frac{\binom{p+1}{p}}{k+p}+\sum_{q=0}^{p+1}(-1)^{q+1}\frac{\binom{p+1}{q}}{k+p+1}\right.$$

$$\left.+(-1)^{p+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}\right]$$

Karena $\frac{1}{k+p+1}$ merupakan konstanta, maka sesuai sifat notasi sigma kita memperoleh

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\binom{p+1}{0}}{k} - \frac{\binom{p+1}{1}}{k+1} + \ldots + (-1)^p \frac{\binom{p+1}{p}}{k+p}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{k+p+1}\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}(-1)^q + (-1)^{p+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}\right]$$

Kini kita perhatikan bahwa bentuk

$$\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}(-1)^q$$

jika kita uraikan akan sesuai dengan akibat 2 dalam subbab 2.8.3, yang nilainya sama dengan nol. Artinya kita memperoleh

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\binom{p+1}{0}}{k} - \frac{\binom{p+1}{1}}{k+1} + \ldots + (-1)^p \frac{\binom{p+1}{p}}{k+p} + (-1)^{p+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{\binom{p+1}{0}}{k} - \frac{\binom{p+1}{1}}{k+1} + \frac{\binom{p+1}{2}}{k+2} \ldots + (-1)^{p+1}\frac{\binom{p+1}{p+1}}{k+p+1}\right]$$

sesuai yang kita inginkan.

Terbukti bahwa pernyataan ini benar untuk $r = p + 1$.

Jadi, dugaan kita benar.

Untuk setiap bilangan asli r berlaku

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r)} = \frac{1}{r!}\left[\frac{\binom{r}{0}}{k} - \frac{\binom{r}{1}}{k+1} + \frac{\binom{r}{2}}{k+2} - \ldots + (-1)^r \frac{\binom{r}{r}}{k+r}\right]$$

Sekarang kita akan mencoba menentukan jumlah dari

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}$$

Nanti kita akan menggunakan hasil tadi dalam menentukan jumlah ini, tetapi sebelumnya kita akan kembali membuat dugaan. Untuk itu, terlebih dahulu kita akan mengumpulkan data. Sejauh ini kita telah mengetahui bahwa

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

Kini kita akan mencoba menentukan jumlah dari

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Tadi telah kita dapatkan bahwa

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

Maka jumlah deret ini adalah

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

Karena $\frac{1}{6}$ merupakan konstanta, maka sesuai sifat notasi sigma kita memperoleh

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(-\frac{2}{k+1}+\frac{2}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

Sesuai sifat kelinearan notasi sigma diperoleh

$$=\frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{k+1}+\frac{2}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{k+1}+\frac{2}{k+2}\right)+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

Ketiga sigma yang ada kita uraikan sehingga diperoleh jumlah

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{18}-\frac{2}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

Dengan cara yang sama kita juga dapat memperoleh

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right]$$

Kini kita tuliskan semua data yang telah kita ketahui sejauh ini.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right]$$

Data ini mengarahkan kita pada dugaan

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+r)}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+r)}\right]$$

Kini kita tidak akan membuktikan dugaan ini dengan induksi matematika, tetapi kita akan membuktikannya secara langsung.

Dengan memanfaatkan hasil tadi, yaitu

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+r)}=\frac{1}{r!}\left[\frac{\binom{r}{0}}{k}-\frac{\binom{r}{1}}{k+1}+\frac{\binom{r}{2}}{k+2}-\dots+(-1)^r\frac{\binom{r}{r}}{k+r}\right]$$

kita dapat mengubah ruas kiri menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{\binom{r}{0}}{k} - \frac{\binom{r}{1}}{k+1} + \frac{\binom{r}{2}}{k+2} - \ldots + (-1)^r \frac{\binom{r}{r}}{k+r}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{\binom{r}{0}}{k} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r}{q}}{k+q} + (-1)^r \frac{\binom{r}{r}}{k+r}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{k} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r}{q}}{k+q} + (-1)^r \frac{1}{k+r}\right]$$

Dengan menggunakan identitas Pascal, kita memperoleh

$$\binom{r}{q} = \binom{r-1}{q} + \binom{r-1}{q-1}$$

maka

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{k} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q} + \binom{r-1}{q-1}}{k+q} + (-1)^r \frac{1}{k+r}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{k} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q-1}}{k+q} + (-1)^r \frac{1}{k+r}\right]$$

Kita dapat mengubah batas notasi sigma dalam yang kedua menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{k} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} + \sum_{q=0}^{r-2} (-1)^{q+1} \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q+1} + (-1)^r \frac{1}{k+r}\right]$$

Kini kita akan memasukkan suku ke-0 ke dalam sigma pertama dan suku ke-(r – 1) ke dalam sigma kedua.

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!} \left[\frac{\binom{r-1}{0}}{k+0} + \sum_{q=1}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} + \sum_{q=0}^{r-2} (-1)^{q+1} \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q+1} \right.$$

$$\left. + (-1)^{(r-1)+1} \frac{\binom{r-1}{r-1}}{k+(r-1)+1} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r!} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} + \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^{q+1} \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q+1} \right]$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} - \sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q+1} \right]$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} \right] - \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q+1} \right]$$

Kita dapat mengubah batas notasi sigma luar yang kedua menjadi

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} \right] - \frac{1}{r!} \sum_{k=2}^{n+1} \left[\sum_{q=0}^{r-1} (-1)^q \frac{\binom{r-1}{q}}{k+q} \right]$$

Jika kedua sigma dalam kita uraikan akan diperoleh

$$\frac{\binom{r-1}{0}}{k} - \frac{\binom{r-1}{1}}{k+1} + \frac{\binom{r-1}{2}}{k+2} - \ldots + (-1)^p \frac{\binom{r-1}{r-1}}{k+r-1}$$

Berdasarkan persamaan yang telah kita buktikan sebelumnya, bentuk ini sama dengan

$$\frac{(r-1)!}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

Maka kita peroleh

$$= \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{n}\frac{(r-1)!}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)} - \frac{1}{r!}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(r-1)!}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

$$= \frac{(r-1)!}{r(r-1)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

$$- \frac{(r-1)!}{r(r-1)!}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)} - \frac{1}{r}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

Kini kita masukkan suku ke-1 dan keluarkan suku ke-$(n + 1)$ dari sigma kedua.

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}$$

$$- \frac{1}{r}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot r}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\big((k+1)\big)\ldots(k+r-1)}$$

$$- \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)} + \frac{1}{r\cdot r!}$$

$$\left. - \frac{1}{r(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}\right]$$

Kita perhatikan bahwa kedua sigma saling menghapuskan, sehingga tersisa

$$= \frac{1}{r \cdot r!} - \frac{1}{r(n+1)(n+2)(n+3)...(n+r)}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+r)}\right]$$

sesuai yang kita inginkan.

Jadi, dugaan kita benar.

Untuk setiap bilangan asli r berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+r)} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+r)}\right]$$

Kita telah selesai memperumum hal ini, yaitu jumlah dari deret pecahan yang masing-masing sukunya mempunyai penyebut yang berupa hasil perkalian r + 1 bilangan asli berurutan. Tetapi dalam soal berikut pembaca dapat mencoba kembali untuk deret pecahan yang masing-masing sukunya mempunyai penyebut yang berupa hasil perkalian r + 1 suku barisan aritmetika.

Soal

Misalkan suatu barisan aritmetika memiliki suku pertama k dan beda d. Suku-suku barisan tersebut sampai dengan suku ke-(r + 1) adalah

$$k, k + d, k + 2d, ..., k + rd$$

5.94 Tentukanlah penguraian dari pecahan

$$\frac{1}{k(k+d)(k+2d)...(k+rd)}$$

5.95 Tentukanlah jumlah dari deret

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+d)(k+2d)...(k+rd)}$$

BAB VI
BEBERAPA MASALAH PILIHAN

Kita telah banyak belajar bagaimana strategi pemecahan masalah diterapkan, khususnya strategi mengumpulkan data. Pada bagian ini akan dibahas beberapa masalah lain.

6.1 Masalah Penghitungan Bilangan dengan Digit Berulang

Dalam bahasa Inggris, bilangan-bilangan asli yang terdiri dari digit-digit yang berulang, misalnya 11, 222, 3333, 44444, dan sebagainya, disebut *rep-digit*. Istilah ini berasal dari "***repeated digit***". Khusus bilangan-bilangan asli yang terdiri dari digit-digit 1 yang berulang, misalnya 11, 111, 1111, 11111, dan sebagainya, disebut *repunit*, yang berasal dari "***repeated unit***".

Sebagai awal, marilah kita perhatikan bahwa

$$10^1 - 1 = 9$$
$$10^2 - 1 = 99$$
$$10^3 - 1 = 999$$
$$10^4 - 1 = 9999$$

Di sini kita melihat bahwa pangkat dari 10 pada ruas kiri sama dengan banyaknya angka 9 yang dihasilkan pada ruas kanan. Oleh karena itu, secara umum kita dapat menuliskan

$$10^n - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{\text{sebanyak } n}$$

Lebih lanjut, kita perhatikan bahwa

$$10^n - 1 = 9 \times \underbrace{111...1}_{\text{sebanyak } n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}(10^n - 1) = \underbrace{111...1}_{\text{sebanyak } n}$$

Kemudian jika kita kalikan kedua ruas dengan a, kita mendapatkan

$$\frac{a}{9}(10^n - 1) = \underbrace{aaa...a}_{\text{sebanyak } n}$$

> Untuk setiap bilangan asli a dengan $1 \leq a \leq 9$ berlaku
>
> $$\frac{a}{9}(10^n - 1) = \underbrace{aaa...a}_{\text{sebanyak } n}$$

Sekarang hal ini kita jadikan dasar untuk menyelesaikan masalah-masalah penghitungan bilangan-bilangan dengan digit berulang. Kita perhatikan dua contoh berikut.

Contoh 6.1.1

Hitunglah

$$\underbrace{222...2}_{2011} + \left(\underbrace{333...3}_{2011}\right)^2$$

Jawab

Kita dapat mengawali dengan mengumpulkan data. Hal yang membuat masalah ini rumit adalah bilangan 2011. Kita ganti dengan bilangan-bilangan kecil sehingga diperoleh

$$2 + (3)^2 = 2 + 9 = 11$$
$$22 + (33)^2 = 22 + 1089 = 1111$$
$$222 + (333)^2 = 222 + 110889 = 111111$$
$$2222 + (3333)^2 = 2222 + 11108889 = 11111111$$

sehingga dugaan kita tentu adalah

$$\underbrace{222...2}_{2011} + \left(\underbrace{333...3}_{2011}\right)^2 = \underbrace{111...1}_{4022}$$

Hal ini dapat kita buktikan dengan mudah dengan memerhatikan hasil

$$\frac{a}{9}(10^n - 1) = \underbrace{aaa\ldots a}_{\text{sebanyak } n}$$

Dari sini kita peroleh

$$\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{2011} + \left(\underbrace{333\ldots3}_{2011}\right)^2 &= \frac{2}{9}(10^{2011} - 1) + \left[\frac{3}{9}(10^{2011} - 1)\right]^2 \\
&= \frac{2}{9} \times 10^{2011} - \frac{2}{9} + \left[\frac{1}{3}(10^{2011} - 1)\right]^2 \\
&= \cancel{\frac{2}{9} \times 10^{2011}} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times (10^{2011})^2 - \cancel{\frac{2}{9} \times 10^{2011}} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9} \times 10^{4022} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}(10^{4022} - 1) \\
&= \underbrace{111\ldots1}_{4022}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\underbrace{222\ldots2}_{2011} + \left(\underbrace{333\ldots3}_{2011}\right)^2 = \underbrace{111\ldots1}_{4022}$$

Contoh 6.1.2

Tunjukkan bahwa setiap suku dalam barisan:

49, 4489, 444889, 44448889, . . .

merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan akar dari suku-suku tersebut.

Jawab

Mula-mula kita perhatikan bahwa

$$49 = 7^2$$
$$4489 = 67^2$$
$$444889 = 667^2$$
$$44448889 = 6667^2$$

Dalam suku ke-1, terdapat 1 angka 4 dan 0 angka 8.

Dalam suku ke-2, terdapat 2 angka 4 dan 1 angka 8.

Dalam suku ke-3, terdapat 3 angka 4 dan 2 angka 8.

Dalam suku ke-4, terdapat 4 angka 4 dan 3 angka 8.

Maka dalam suku ke-n, terdapat n angka 4 dan n – 1 angka 8.

Sehingga setiap suku dari barisan ini dapat kita tulis sebagai

$$\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9$$

Kita akan membuktikan bahwa bilangan ini adalah bilangan kuadrat sempurna.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{444\ldots4}_{n} + \underbrace{444\ldots4}_{n-1}5 \\
&= \underbrace{444\ldots4}_{2n} + \underbrace{444\ldots4}_{n} + 1 \\
&= \frac{4}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{4}{9}(10^{n} - 1) + 1 \\
&= \frac{4}{9} \times 10^{2n} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times 10^{n} - \frac{4}{9} + 1 \\
&= \frac{4}{9} \times (10^{n})^2 + \frac{4}{9} \times 10^{n} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[4 \times (10^{n})^2 + 4 \times 10^{n} + 1\right] \\
&= \frac{1}{9}(2 \times 10^{n} + 1)^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}(2 \times 10^{n} + 1)\right]^2 \\
&= \left(\frac{2}{3} \times 10^{n} + \frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \left[\frac{6}{9}(10^{n} - 1) + \frac{9}{9}\right]^2 \\
&= \left(\underbrace{666\ldots6}_{n} + 1\right)^2 \\
&= \underbrace{666\ldots6}_{n-1}7^2
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa bilangan ini bilangan kuadrat sempurna, dan akarnya adalah

$$\underbrace{666\ldots6}_{n-1}7$$

Soal

6.1 Misalkan

$$P = \underbrace{444\ldots4}_{2012}$$

$$Q = \underbrace{888\ldots8}_{1006}$$

Hitunglah

a. $\sqrt{P - Q}$

b. $\sqrt{P + 2Q + 4}$

6.2 Jika

$$A = \underbrace{1111\ldots1}_{2011}$$

$$B = \underbrace{1000\ldots05}_{2012}$$

hitunglah nilai $\sqrt{AB + 1}$.

6.3 Diketahui

$$U = \underbrace{555\ldots56}_{2011}$$

$$V = \underbrace{444\ldots45}_{2011}$$

hitunglah nilai $U^2 - V^2$.

6.4 Hitunglah

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2011}\underbrace{222\ldots2}_{2012}5}$$

6.5 Buktikan bahwa setiap suku dalam barisan

1024, 110224, 11102224, 1111022224, ...

merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan akar dari setiap suku tersebut.

6.6 Misalkan

$$N = \underbrace{999\ldots9}_{2010}$$

Tentukanlah hasil penjumlahan semua digit dari N^2.

6.7 Misalkan

$$M = 1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + 1\underbrace{000\ldots0}_{50 \text{ angka nol}}1$$

Jika M dihitung dan dinyatakan dalam sebuah bilangan bulat, tentukan hasil penjumlahan digit-digitnya.

6.8 Misalkan

$$N = \underbrace{111\ldots1}_{2011}\underbrace{222\ldots2}_{2011}$$

Tentukan hasil bagi jika N dibagi dengan

$$\underbrace{666\ldots6}_{2011}$$

6.9 Bila

$$P = \underbrace{666\ldots6}_{2012}$$

$$Q = \underbrace{333\ldots3}_{1006}$$

tentukan hasil penjumlahan digit-digit dari $\frac{P}{Q}$.

6.10 Hitunglah hasil penjumlahan

$$\sqrt{1156} + \sqrt{111556} + \sqrt{11115556} + \ldots + \sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2011}\underbrace{555\ldots5}_{2010}6}$$

6.2 Menentukan Digit Terakhir dari Hasil Suatu Perpangkatan

Salah satu tipe soal yang sering muncul dalam olimpiade matematika adalah soal yang meminta kita menentukan digit (angka) terakhir dari hasil suatu perpangkatan. Tentu kita tidak perlu menghitung hasil dari perpangkatan tersebut untuk menentukan digit terakhirnya.

Sebenarnya masalah ini merupakan bagian dari teori bilangan, tetapi hal utama yang akan dibahas di sini adalah bagaimana kita menentukan digit terakhir tersebut dengan memanfaatkan teorema binomial. Namun sebelumnya kita perhatikan terlebih dahulu contoh berikut.

Contoh 6.2.1

Tentukanlah digit terakhir pada hasil dari 2^{99}.

Jawab

Kita dapat mengawali dengan mengumpulkan data. Sekali lagi hal yang membuat masalah ini rumit adalah bilangan 99. Kita ganti dengan bilangan-bilangan kecil sehingga diperoleh

Bilangan	Digit Satuan
$2^1 = 2$	2
$2^2 = 4$	4
$2^3 = 8$	8
$2^4 = 16$	6
$2^5 = 32$	2
$2^6 = 64$	4
$2^7 = 128$	8
$2^8 = 256$	6
$2^9 = 512$	2
$2^{10} = 1024$	4

Dari data yang telah kita peroleh dapat kita lihat suatu pola, yaitu:

1. Jika n bersisa 1 bila dibagi 4, maka digit satuan dari 2^n adalah 2.
2. Jika n bersisa 2 bila dibagi 4, maka digit satuan dari 2^n adalah 4.
3. Jika n bersisa 3 bila dibagi 4, maka digit satuan dari 2^n adalah 8.
4. Jika n habis dibagi 4, maka digit satuan dari 2^n adalah 6.

Dari sini, tentu dugaan kita adalah karena 99 bersisa 3 bila dibagi 4, maka digit satuan dari 2^{99} adalah 8. Dugaan ini dapat kita buktikan dengan memerhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2^{99} &= 2^{4\times24+3} \\ &= (2^4)^{24} \times 2^3 \\ &= 16^{24} \times 8 \end{aligned}$$

dan kita mengetahui bahwa digit terakhir pada pangkat dari 16 pastilah 6. Jadi, digit terakhir 2^{99} sama dengan digit terakhir dari 6×8, yaitu 8.

Dari contoh di atas kita dapat menyimpulkan bahwa cara atau teknik dasar menentukan digit terakhir dari hasil suatu perpangkatan adalah dengan mengubah bentuknya menjadi bentuk yang memuat perpangkatan yang tidak mengubah digit terakhir. Kita dapat mengubahnya ke bentuk yang berakhiran 1, 5 atau 6, sebab bilangan yang berakhiran 1, 5, atau 6 bila dipangkatkan berapapun hasilnya pasti tetap berakhiran 1, 5, atau 6.

Sebagai contoh lain, karena

$$3^{57} = (3^4)^{14} \times 3^1 = 81^{14} \times 3$$

maka digit terakhir pada hasil dari 3^{57} sama dengan digit terakhir dari 1×3, yaitu 3.

Ada cara lain yang dapat kita gunakan untuk menentukan digit terakhir pada akhir hasil suatu perpangkatan, yaitu dengan menggunakan teorema binomial. Lebih dari itu, teorema binomial dapat pula kita gunakan untuk menentukan dua atau lebih digit terakhir dari suatu perpangkatan. Perhatikanlah contoh-contoh berikut.

Contoh 6.2.2

Tentukanlah dua digit terakhir pada hasil dari 91^{45}.

Jawab

Menurut teorema binomial kita dapatkan

$$\begin{aligned} 91^{45} &= (90+1)^{45} \\ &= \binom{45}{0}90^{45} + \binom{45}{1}90^{44}1^1 + \ldots + \binom{45}{43}90^2 1^{43} + \binom{45}{44}90^1 1^{44} + \binom{45}{45}1^{45} \\ &= \left[\binom{45}{0}90^{45} + \binom{45}{1}90^{44}1^1 + \ldots + \binom{45}{43}90^2 1^{43}\right] + 45 \cdot 90 + 1 \end{aligned}$$

Kini kita perhatikan bahwa semua suku di dalam kurung siku memuat faktor 100. Oleh karena itu, dua digit terakhir dari hasil operasi dalam kurung siku tersebut adalah 00. Jadi, dua digit terakhir dari 91^{45} sama dengan dua digit terakhir dari hasil

$$0 + 45 \cdot 90 + 1 = 4051$$

yaitu 51.

Contoh 6.2.3

Tentukanlah dua digit terakhir pada hasil dari 39^{73}.

Jawab

Menurut teorema binomial kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
39^{73} &= [40+(-1)]^{73} \\
&= \binom{73}{0}40^{73} + \binom{73}{1}40^{72}(-1)^{1} + \ldots + \binom{73}{71}40^{2}(-1)^{71} + \binom{73}{72}40^{1}(-1)^{72} \\
&\quad + \binom{73}{73}(-1)^{73} \\
&= \left[\binom{73}{0}40^{73} + \binom{73}{1}40^{72}(-1)^{1} + \ldots + \binom{73}{71}40^{2}(-1)^{71}\right] + 73\cdot 40 - 1
\end{aligned}
$$

Kini kita perhatikan bahwa semua suku di dalam kurung siku memuat faktor 100. Oleh karena itu, dua digit terakhir dari hasil operasi dalam kurung siku tersebut adalah 00. Jadi, dua digit terakhir dari 39^{73} sama dengan dua digit terakhir dari hasil

$$0 + 73 \cdot 40 - 1 = 2919$$

yaitu 19.

Contoh 6.2.4

Tentukanlah dua digit terakhir pada hasil dari 23^{84}.

Jawab

Kita telah melihat dalam dua contoh sebelumnya bahwa jika suatu bilangan dapat dituliskan dalam bentuk 1 lebihnya dari kelipatan 10 atau -1 lebihnya dari kelipatan 10, maka teorema binomial dapat kita gunakan dengan mudah. Sekarang kita akan memanfaatkan hal ini untuk memanipulasi bentuk 23^{84}.

Perhatikan bahwa setiap bilangan dengan digit terakhir 3 atau 7 jika dikuadratkan akan menghasilkan bilangan dengan digit terakhir 9. Bilangan dengan digit terakhir 9 dapat kita tuliskan dalam bentuk -1 lebihnya dari kelipatan 10, seperti dalam contoh 6.2.3.

Oleh karena itu kita dapat memanipulasi bentuk ini menjadi

$$23^{84} = (23^2)^{42} = 529^{42}$$

Menurut teorema binomial kita dapatkan

$$\begin{aligned}529^{42} &= [530 + (-1)]^{42} \\ &= \binom{42}{0}530^{42} + \binom{42}{1}530^{41}(-1)^1 + \ldots + \binom{42}{40}530^2(-1)^{40} + \binom{42}{41}530^1(-1)^{41} \\ &\quad + \binom{42}{42}(-1)^{42} \\ &= \left[\binom{42}{0}530^{42} + \binom{42}{1}530^{41}(-1)^1 + \ldots + \binom{42}{40}530^2(-1)^{40}\right] - 42 \cdot 530 + 1\end{aligned}$$

Kini kita perhatikan bahwa semua suku di dalam kurung siku memuat faktor 100. Oleh karena itu, dua digit terakhir dari hasil operasi dalam kurung siku tersebut adalah 00. Jadi, dua digit terakhir dari 529^{42} sama dengan dua digit terakhir dari hasil

$$0 - 42 \cdot 530 + 1 = 0 - 22259$$

yaitu 100 – 59 = 41.

Untuk dapat menentukan beberapa digit terakhir, memang teorema binomial tidak selalu mudah. Sebagai contoh, pada 2^{99} tadi misalnya, kita tidak dapat menemukan pangkat yang bisa dituliskan dalam bentuk 1 lebihnya atau -1 lebihnya dari kelipatan 10. Oleh karena itu, diperlukan teknik lebih lanjut yang dipelajari dalam teori bilangan. Tetapi ketika bisa digunakan, teorema binomial cukup sederhana, karena kita cukup melihat beberapa suku terakhir dari suatu penjabaran. Tidak memerlukan konsep matematika yang terlalu tinggi.

Soal

6.11 Tentukan digit terakhir pada hasil dari 7^{39}.

6.12 Tentukan digit terakhir pada hasil dari 1993^{1991}.

6.13 Tentukan digit terakhir pada hasil dari

$$2^{100} \times 3^{101} \times 4^{102} \times 7^{103}$$

Petunjuk : Tuliskan dalam bentuk yang lebih mudah, misalnya $6^{100} \times 21 \times 28^{102}$. Karena digit terakhir dari $6^{100} \times 21$ adalah 6, maka kita tinggal menentukan digit terakhir dari 28^{102} lalu dikalikan 6.

6.14 Dimiliki

$$A = \sum_{k=1}^{5} k^{2011-k}$$

Tentukan digit terakhir dari A.

6.15 Tentukan dua digit terakhir pada hasil dari 51^{83}.

6.16 Tentukan dua digit terakhir pada hasil dari 99^{101}.

6.17 Tentukan dua digit terakhir pada hasil dari 17^{58}.

6.18 Tentukan dua digit terakhir pada hasil dari 103^{95}.

6.19 Tentukan tiga digit terakhir pada hasil dari 59^{72}.

6.20 Tentukan tiga digit terakhir pada hasil dari 37^{41}.

6.21 Perhatikan

$$S = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$$

a. Tentukan digit terakhir dari S.

b. Tentukan dua digit terakhir dari S.

c. Tentukan tiga digit terakhir dari S.

Petunjuk : Mulai 5!, 6!, 7!, dan seterusnya, berapa digit terakhirnya?

6.22 Tentukan digit terakhir pada hasil dari

$$(1!)^{2011} + (2!)^{2011} + (3!)^{2011} + \dots + (2011!)^{2011}$$

6.3 Menentukan Banyaknya Angka Nol di Akhir Hasil Perkalian atau Perpangkatan

Pada masalah-masalah sebelumnya kita diminta menentukan digit terakhir dari suatu hasil perpangkatan. Selain menentukan digit terakhir, pemecahan masalah lain yang berkaitan dengan pangkat dan perkalian

adalah menentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari perpangkatan atau perkalian tersebut. Tentu kita tidak perlu menghitung hasil dari perkalian atau perpangkatan tersebut untuk menentukan banyaknya angka nol yang ada.

Berikut akan diberikan beberapa contoh permasalahan tentang menentukan banyaknya angka nol di akhir hasil perkalian atau perpangkatan.

Contoh 6.3.1

Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari operasi berikut.

a. $2^9 \times 5^{11}$

b. $4^7 \times 5^8$

Jawab

a. Pertama-tama kita perhatikan bahwa angka nol terjadi sebagai hasil perkalian 2×5, maka

$$\begin{aligned} 2^9 \times 5^{11} &= 2^9 \times 5^9 \times 5^2 \\ &= (2 \times 5)^9 \times 5^2 \\ &= 10^9 \times 5^2 \end{aligned}$$

Jadi, bilangan ini memiliki 9 angka nol tak terputus di bagian akhir.

b. Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned} 4^7 \times 5^8 &= (2^2)^7 \times 5^8 \\ &= 2^{14} \times 5^8 \\ &= 2^6 \times 2^8 \times 5^8 \\ &= 2^6 \times (2 \times 5)^8 \\ &= 2^6 \times 10^8 \end{aligned}$$

Jadi, bilangan ini memiliki 8 angka nol tak terputus di bagian akhir.

Contoh 6.3.2

Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari operasi berikut.

a. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

b. $21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30$

c. $121 \times 122 \times 123 \times 124 \times 125 \times 126 \times 127 \times 128 \times 129 \times 130$

Jawab

a. Kita perhatikan bahwa

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$
$$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times (2 \times 5)$$

Karena terdapat dua faktor 2 dan dua faktor 5, bilangan ini memiliki 2 angka nol tak terputus di bagian akhir.

b. Kita perhatikan bahwa

$$21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30$$
$$= 21 \times 22 \times 23 \times 24 \times (5 \times 5) \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times (2 \times 3 \times 5)$$

Terlihat bahwa pada bilangan ini terdapat tiga faktor 5. Banyaknya faktor 2 tidak perlu kita perhitungkan sebab pasti jauh lebih banyak daripada banyaknya faktor 5.

Jadi, bilangan ini memiliki 3 angka nol tak terputus di bagian akhir.

c. Kita perhatikan bentuk tersebut.

$$121 \times 122 \times 123 \times 124 \times 125 \times 126 \times 127 \times 128 \times 129 \times 130$$

Tampak bahwa bentuk ini memiliki empat faktor 5 yang berasal dari 125 (sebanyak 3) dan 130 (sebanyak 1). Sama dengan sebelumnya, kita tidak perlu memperhitungkan banyaknya faktor 2 sebab pasti lebih banyak daripada banyaknya faktor 5.

Jadi, bilangan ini memiliki 4 angka nol tak terputus di bagian akhir.

Kini marilah kita kembangkan hal ini untuk menghitung banyaknya angka nol pada akhir hasil dari suatu faktorial. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 6.3.3

Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari 100!.

Jawab

Sekali lagi perhatikan bahwa angka nol merupakan hasil perkalian 2 dan 5. Seandainya bentuk 100! kita faktorisasiprimakan, kita dapat menuliskannya sebagai

$$100! = 2^a \times 5^b \times \ldots$$

dengan "..." berisi faktor-faktor prima yang lain dengan pangkatnya masing-masing, namun kita tidak memperhitungkan ini sebab tak mempengaruhi

munculnya angka nol di akhir. Yang mempengaruhi hanyalah 2 dan 5, dan di sini tentu nilai a jauh lebih besar daripada b, sehingga untuk mengetahui banyaknya angka nol, kita cukup menghitung b.

(1) Kita perhatikan bahwa bilangan-bilangan kelipatan 5 yang ada dalam 1–100 masing-masing menyebabkan munculnya 1 angka nol. Bilangan-bilangan kelipatan 5 tersebut adalah

$$5, 10, 15, 20, \ldots, 100$$

atau jika ditulis dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya,

$$5 \times 1, 5 \times 2, 5 \times 3, 5 \times 4, \ldots, 5 \times 20$$

Semuanya ada sebanyak 20 bilangan, maka ada 20 angka nol.

(2) Selanjutnya perhatikan pula bilangan-bilangan kelipatan 25 yang ada dalam 1–100 masing-masing menyebabkan munculnya 2 angka nol. Bilangan-bilangan tersebut adalah

$$25, 50, 75, 100$$

Semuanya ada sebanyak 4 bilangan, yang tentu memberikan 8 angka nol. Namun, karena kelipatan 25 juga merupakan kelipatan 5 yang sudah terhitung pada bagian (1), maka kita cukup menambahkan hasil (1) dengan 4.

Jadi, pada akhir hasil dari 100! terdapat sebanyak

$$20 + 4 = 24$$

angka nol tak terputus.

Contoh 6.3.4

Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari

$$\prod_{i=2}^{500}\left(i^2 - 1\right)$$

Jawab

Arti dari penulisan ini adalah *perkalian* bilangan-bilangan yang berbentuk $i^2 - 1$ dari $i = 2$ hingga $i = 500$, yaitu

$$(2^2 - 1) \times (3^2 - 1) \times (4^2 - 1) \times (5^2 - 1) \times \ldots \times (500^2 - 1)$$

Kita diminta menentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil perkalian ini. Mula-mula perhatikan bahwa kita dapat menuliskan perkalian ini sebagai

$(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)(5-1)(5+1)\ldots(500-1)(500+1)$
dengan memerhatikan bahwa $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Selanjutnya kita susun menjadi
$(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)\ldots(500-1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)\ldots(500+1)$
atau sama saja dengan

$$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 499) \times (3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 501)$$

dan kita dapat sedikit memodifikasi bentuk ini agar lebih enak terlihat, menjadi sebagai berikut.

$$(499!) \times (3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 499) \times 500 \times 501$$
$$= (499!) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 499) \times 250 \times 501$$
$$= (499!)^2 \times 250 \times 501$$
$$= (499!)^2 \times 5^3 \times 2 \times 501$$

Dari sini terlihat bahwa kita cukup menghitung banyaknya angka nol di akhir hasil dari 499! kemudian kita kalikan dua lalu kita tambahkan 3. Banyak angka nol di akhir hasil dari 499! kita cari dengan metode yang sama seperti soal sebelumnya.

(1) Kelipatan 5: menyebabkan 1 angka nol

$$5, 10, 15, 20, \ldots, 495$$

atau jika ditulis dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya,

$$5 \times 1, 5 \times 2, 5 \times 3, 5 \times 4, \ldots, 5 \times 99$$

Semuanya ada sebanyak 99 bilangan, maka ada 99 angka nol.

(2) Kelipatan 25: menyebabkan 2 angka nol

$$25, 50, 75, 100, \ldots, 475$$

atau jika ditulis dalam bentuk yang memuat nomor urut sukunya,

$$25 \times 1, 25 \times 2, 25 \times 3, 25 \times 4, \ldots, 25 \times 19$$

Semuanya ada sebanyak 19 bilangan. Karena kelipatan 25 juga merupakan kelipatan 5 yang sudah terhitung di (1), maka kita cukup menambahkan hasil (1) dengan 19.

(3) Kelipatan 125: menyebabkan 3 angka nol

$$125, 250, 375$$

Semuanya ada sebanyak 3 bilangan. Karena kelipatan 125 juga merupakan kelipatan 25 dan 5 yang sudah terhitung di (1) dan (2), maka kita cukup menambahkan hasil penjumlahan (1) dan (2) dengan 3.

Jadi, pada akhir hasil dari 499! terdapat sebanyak

$$99 + 19 + 3 = 121$$

angka nol tak terputus.

Jadi, pada akhir hasil dari

$$\prod_{i=2}^{500}\left(i^2 - 1\right)$$

terdapat sebanyak

$$2 \times 121 + 3 = 245$$

angka nol tak terputus.

Setelah memerhatikan contoh di atas, tentu kita terpikir bahwa banyaknya angka nol pada akhir hasil dari 100! sama dengan banyaknya bilangan asli dari 1–100 yang merupakan kelipatan 5 ditambah dengan kelipatan 25. Atau dapat dituliskan bahwa banyaknya angka nol ini sama dengan

$$\frac{100}{5}+\frac{100}{25}$$

Sedangkan banyaknya angka nol pada akhir hasil dari 499! sama dengan banyaknya bilangan asli dari 1–499 yang merupakan kelipatan 5, ditambah dengan kelipatan 25, ditambah dengan kelipatan 125. Atau dapat dituliskan bahwa banyaknya angka nol ini sama dengan

$$\frac{495}{5}+\frac{425}{25}+\frac{375}{125}$$

Kita dapat mengganti bilangan 495, 425, dan 375 dengan 499, asalkan kita tambahkan fungsi *floor* pada pembagian tersebut, menjadi

$$\left\lfloor\frac{499}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{499}{25}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{499}{125}\right\rfloor$$

Fungsi $\lfloor \ldots \rfloor$ disebut fungsi *floor* (fungsi lantai), yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil. Secara sederhana, $\lfloor a \rfloor$ berarti membulatkan a ke bawah, misalnya $\lfloor 4{,}21 \rfloor = 4, \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lfloor 5 \rfloor = 5,$ dan $\lfloor -1{,}3 \rfloor = -2$.

Dengan demikian, metode untuk menentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari suatu faktorial dapat kita perumum menjadi sebagai berikut.

Misalkan N menyatakan banyaknya angka nol di akhir hasil dari $n!$, maka

$$N = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$$

dengan k memenuhi $5^k \leq n$.

Sebagai contoh penggunaan perumuman ini, misalnya akan ditentukan banyaknya angka nol tak terputus dari 2011!.

Contoh 6.3.5

Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari 2011!.

Jawab

Dengan menggunakan perumuman di atas,

$$N = \left\lfloor \frac{2011}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2011}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2011}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2011}{5^4} \right\rfloor$$

sehingga

$$N = \lfloor 402,2 \rfloor + \lfloor 80,44 \rfloor + \lfloor 16,088 \rfloor + \lfloor 3,2176 \rfloor$$

dan hasilnya adalah

$$N = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$$

Jadi, pada akhir hasil dari 2011! terdapat sebanyak 501 angka nol tak terputus.

Soal

6.23 Tentukan banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari:

a. $2^{23} \times 5^{51} \times 3^{219}$

b. $2^{314} \times 5^{251} \times 3^{227}$

c. $4^{221} \times 5^{326}$

d. $8^{133} \times 25^{200}$

6.24 Perlihatkan bahwa 1000! mempunyai 249 angka nol tanpa terputus di bagian belakang.

6.25 Berapa banyak angka nol tak terputus di akhir hasil dari

$$\prod_{i=4}^{2011} (i^2 - 9)$$

6.26 Buktikan bahwa pada akhir hasil dari

$$\prod_{n=2}^{1000}(n^3-1)$$

terdapat sebanyak 246 angka nol tak terputus.

6.27 Tunjukkan bahwa

$$\prod_{k=1}^{100}k^k$$

memiliki 1300 angka nol tak terputus di bagian akhir.

6.28 Carilah nilai bilangan bulat positif terbesar n sehingga $n!$ berakhir dengan tepat 100 angka nol tak terputus.

6.29 Misalkan

$$A=\underbrace{5000...05}_{2012}{}^2-\underbrace{4999...95}_{2012}{}^2$$

dan

$$B = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times ... \times 2012$$

Hitunglah banyaknya angka nol tak terputus di akhir hasil dari $A \times B$.

6.30 Operasi *faktorial ganda* dilambangkan dengan dua tanda seru "!!" dan secara rekursif didefinisikan sebagai

$$n!!=\begin{cases}1, \text{ jika } n\leq 0 \text{ atau } n=1\\ n(n-2)!!, \text{ jika } n\geq 2\end{cases}$$

Sebagai contoh,

$$8!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 384$$

dan

$$9!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$$

Tentukanlah banyaknya angka nol tak terputus pada akhir hasil dari:

a. $11!! \times 12!!$

b. $2011!! \times 2012!!$

6.31 Masalah menentukan banyaknya angka nol di akhir hasil dari suatu faktorial dapat diterjemahkan menjadi masalah menentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga 5^N habis membagi $n!$. Dengan sudut pandang ini, cobalah menjawab persoalan berikut.

a. Tentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga 2^N habis membagi 15!.

b. Tentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga 2^N habis membagi 2011!.

c. Tentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga p^N habis membagi $n!$, di mana p adalah bilangan prima dengan $p \le n$.

d. Perhatikan

$$A = \prod_{k=3}^{100} (k^2 - 4)$$

1) Tentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga 3^N habis membagi A.

2) Tentukan nilai bilangan bulat nonnegatif terbesar N sehingga 6^N habis membagi A.

6.32 (*hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Misalkan $f(n)$ menyatakan banyaknya angka nol tak terputus pada akhir hasil dari $n!$. Gunakan kalkulator atau komputer untuk menghitung nilai dari $\frac{f(n)}{n}$ untuk beberapa nilai n yang makin lama makin besar. Apa yang dapat disimpulkan mengenai nilai dari $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$?

6.4 Menentukan Banyaknya Pecahan Sederhana

Suatu pecahan disebut pecahan sederhana jika pembilang dan penyebutnya tidak mempunyai faktor persekutuan. Sebagai contoh, $\frac{2}{7}$ dan $\frac{5}{12}$ merupakan pecahan sederhana. Tetapi $\frac{4}{6}$ bukan pecahan sederhana, sebab masih dapat disederhanakan menjadi $\frac{2}{3}$. Dalam bab ini akan dibahas bagaimana kita menghitung banyaknya pecahan sederhana, misalnya yang ada dalam barisan

$$\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \ldots, \frac{100}{100}$$

6.4.1 Menghitung Banyaknya Pecahan Sederhana

Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 6.4.1.1

Hitunglah banyaknya pecahan sederhana yang ada dalam barisan

$$\frac{1}{65}, \frac{2}{65}, \frac{3}{65}, \ldots, \frac{65}{65}$$

Jawab

Kita mencoba untuk menjawab tidak dengan cara menuliskan semua suku dalam barisan tersebut kemudian mencoret semua pecahan yang tidak sederhana dan menghitungnya, melainkan marilah kita mencari dan menelusurinya dengan terlebih dahulu mengumpulkan data. Misalkan kita akan menentukan banyaknya pecahan sederhana yang ada dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

Kita ganti penyebut dengan bilangan-bilangan yang lebih mudah.

n	Barisan	Banyaknya
1	$\cancel{\frac{1}{1}}$	0
2	$\frac{1}{2}, \cancel{\frac{2}{2}}$	1
3	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cancel{\frac{3}{3}}$	2
4	$\frac{1}{4}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{3}{4}, \cancel{\frac{4}{4}}$	2
5	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cancel{\frac{5}{5}}$	4
6	$\frac{1}{6}, \cancel{\frac{2}{6}}, \cancel{\frac{3}{6}}, \cancel{\frac{4}{6}}, \frac{5}{6}, \cancel{\frac{6}{6}}$	2

7	$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \cancel{\frac{7}{7}}$	6
8	$\frac{1}{8}, \cancel{\frac{2}{8}}, \frac{3}{8}, \cancel{\frac{4}{8}}, \frac{5}{8}, \cancel{\frac{6}{8}}, \frac{7}{8}, \cancel{\frac{8}{8}}$	4
9	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \cancel{\frac{3}{9}}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \cancel{\frac{6}{9}}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \cancel{\frac{9}{9}}$	6
10	$\frac{1}{10}, \cancel{\frac{2}{10}}, \frac{3}{10}, \cancel{\frac{4}{10}}, \cancel{\frac{5}{10}}, \cancel{\frac{6}{10}}, \frac{7}{10}, \cancel{\frac{8}{10}}, \frac{9}{10}, \cancel{\frac{10}{10}}$	4
11	$\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}, \cancel{\frac{11}{11}}$	10
12	$\frac{1}{12}, \cancel{\frac{2}{12}}, \cancel{\frac{3}{12}}, \cancel{\frac{4}{12}}, \frac{5}{12}, \cancel{\frac{6}{12}}, \frac{7}{12}, \cancel{\frac{8}{12}}, \cancel{\frac{9}{12}}, \cancel{\frac{10}{12}}, \frac{11}{12}, \cancel{\frac{12}{12}}$	4
13	$\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{11}{13}, \frac{12}{13}, \cancel{\frac{13}{13}}$	12

Dari pola di atas, sudahkah kita melihat sesuatu?

Tentu kita melihat bahwa jika penyebut dari pecahan-pecahan tersebut merupakan bilangan prima, maka pecahan yang tidak sederhana hanyalah pecahan yang terakhir, oleh karena itu kita dapat menuliskan sebagai berikut.

(1) Jika $n = p$, dengan p merupakan bilangan prima, maka banyaknya pecahan sederhana dari barisan tersebut adalah $p - 1$.

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \cancel{\frac{p}{p}}$$

Bagaimana mengembangkan hal ini? Marilah kita melihat jika n terdiri dari dua faktor prima berbeda.

Kita ambil contoh, misalkan ketika $n = 15$.

$$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}, \frac{5}{15}, \frac{6}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{9}{15}, \frac{10}{15}, \frac{11}{15}, \frac{12}{15}, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}, \frac{15}{15}$$

Pecahan-pecahan yang tidak sederhana adalah

$\frac{3}{15}, \frac{6}{15}, \frac{9}{15}, \frac{12}{15}, \frac{15}{15}$ (kelipatan 3) serta $\frac{5}{15}, \frac{10}{15}, \frac{15}{15}$ (kelipatan 5)

Maka banyak pecahan yang tidak sederhana adalah 5 + 3 – 1 = 7.

(dikurangi satu karena $\frac{15}{15}$ terhitung dua kali)

Maka banyaknya pecahan yang sederhana adalah 15 – 7 = 8.

Secara umum, jika $n = pq$, pecahan-pecahan yang tidak sederhana adalah:

$\frac{p}{pq}, \frac{2p}{pq}, \frac{3p}{pq}, \ldots, \frac{q.p}{pq}$ (kelipatan p, ada sebanyak q pecahan)

$\frac{q}{pq}, \frac{2q}{pq}, \frac{3q}{pq}, \ldots, \frac{p.q}{pq}$ (kelipatan q, ada sebanyak p pecahan)

Maka banyak pecahan yang tidak sederhana adalah $q + p - 1$.

Maka banyaknya pecahan yang sederhana adalah

$$\begin{aligned} pq - (q + p - 1) &= pq - q - p + 1 \\ &= (p - 1)(q - 1) \end{aligned}$$

(2) Jika $n = pq$, dengan p dan q merupakan bilangan prima berbeda, maka banyaknya pecahan sederhana dari barisan tersebut adalah $(p - 1)(q - 1)$.

Dari hasil ini kita telah dapat menjawab permasalahan utama pada soal, yakni menghitung banyaknya pecahan sederhana dalam

$$\frac{1}{65}, \frac{2}{65}, \frac{3}{65}, \ldots, \frac{65}{65}$$

Karena $65 = 5 \times 13$, dengan 5 dan 13 merupakan bilangan prima berbeda, maka banyaknya pecahan sederhana dalam barisan ini adalah $(5 - 1)(13 - 1) = 4 \times 12 = 48$ pecahan sederhana.

Tentu saja hanya memperumum hingga dua bilangan prima berbeda saja belum cukup. Cobalah melanjutkannya pada soal-soal berikut ini.

Soal

Kita akan memperumum penghitungan banyaknya pecahan sederhana yang ada dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

Hitunglah banyaknya pecahan sederhana tersebut jika:

6.33 $n = p$, dengan p bilangan prima.

6.34 $n = p^2$, dengan p bilangan prima.

6.35 $n = p^3$, dengan p bilangan prima.

6.36 $n = p^e$, dengan p bilangan prima dan e bilangan asli.

6.37 $n = p_1p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda.

6.38 $n = p_1p_2p_3$, dengan p_1, p_2, dan p_3 bilangan prima berbeda.

6.39 Terkalah banyaknya pecahan sederhana tersebut jika

$$n = p_1p_2p_3 \ldots p_k$$

dengan p_1, p_2, p_3, ..., dan p_k bilangan-bilangan prima berbeda.

6.40 $n = p_1^2p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda.

6.41 $n = p_1^3p_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda.

6.42 $n = p_1^ep_2$, dengan p_1 dan p_2 bilangan prima berbeda, e bilangan asli.

6.43 Terkalah banyaknya pecahan sederhana tersebut jika

$$n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

dengan p_1, p_2, p_3, ..., dan p_k bilangan-bilangan prima berbeda serta e_1, e_2, e_3, ..., dan e_k bilangan-bilangan asli.

6.4.2 Fungsi Tosien Euler

Menghitung banyaknya pecahan sederhana dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

sebenarnya sama halnya dengan menentukan banyaknya bilangan asli dari 1 hingga n yang relatif prima (tidak memiliki faktor persekutuan) dengan n.

Dalam teori bilangan, terdapat suatu fungsi yang didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan n

yang relatif prima (tidak memiliki faktor persekutuan) dengan n. Fungsi ini disebut *fungsi tosien Euler* (*Euler's Totient Function*), yang diperkenalkan oleh matematikawan asal Swiss Leonhard Euler (1707–1783). Fungsi ini dilambangkan dengan ϕ (*phi*).

1. Telah kita buktikan bahwa jika p merupakan bilangan prima,

$$\phi(p) = p - 1$$

sebab semua bilangan asli yang kurang dari p tidak memiliki faktor persekutuan dengan p.

2. Jika $n = p^e$ adalah pangkat dari sebuah bilangan prima, maka bilangan-bilangan asli kurang dari atau sama dengan n yang memiliki faktor persekutuan dengan n adalah kelipatan-kelipatan dari p, yaitu

$$p, 2p, 3p, \ldots, (p^{e-1})p$$

Terdapat sebanyak p^{e-1} bilangan, maka banyaknya bilangan yang tidak memiliki faktor persekutuan dengan p^e adalah

$$\begin{aligned}\phi(p^e) &= p^e - p^{e-1}\\ &= p^e\left(1-\frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

3. Kini ambil sembarang m yang habis dibagi p_1. Misalkan $\phi_{p_1}(m)$ menyatakan banyaknya bilangan asli kurang dari atau sama dengan m yang tidak habis dibagi p_1. Sama seperti sebelumnya,

$$p_1, 2p_1, 3p_1, \ldots, \left(\frac{m}{p_1}\right)p_1$$

adalah bilangan-bilangan yang habis dibagi p_1, maka

$$\begin{aligned}\phi_{p_1}(m) &= m - \frac{m}{p_1}\\ &= m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\end{aligned}$$

Kemudian misalkan p_2 adalah bilangan prima lain yang juga habis membagi m. Misalkan $\phi_{p_2}(m)$ menyatakan banyaknya bilangan asli kurang dari atau sama dengan m yang tidak habis dibagi p_2. Bilangan-bilangan yang habis dibagi p_2 adalah

$$p_2, 2p_2, 3p_2, \ldots, \left(\frac{m}{p_2}\right)p_2$$

Maka

$$\phi_{p_2}(m) = m - \frac{m}{p_2}$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

Namun kelipatan p_1p_2 terhitung sebanyak dua kali, yaitu

$$p_1p_2,\ 2p_1p_2,\ 3p_1p_2,\ \ldots,\ \left(\frac{m}{p_1p_2}\right)p_1p_2$$

Maka

$$\phi_{p_1p_2}(m) = m - \frac{m}{p_1p_2}$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1p_2}\right)$$

Jika tidak ada bilangan prima selain p_1 dan p_2 yang habis membagi m, maka banyaknya bilangan yang tidak memiliki faktor persekutuan dengan m adalah

$$\phi(m) = \phi_{p_1}(m) + \phi_{p_2}(m) - \phi_{p_1p_2}(m)$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + m\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - m\left(1 - \frac{1}{p_1p_2}\right)$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1p_2}\right)$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

4. Kini kita akan menemukan bentuk umum dari fungsi tosien ini. Untuk itu, kita akan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk k himpunan. Misalkan X_i menyatakan himpunan bilangan-bilangan asli kurang dari atau sama dengan n yang merupakan kelipatan p_i, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots k$. Apabila

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

maka banyaknya bilangan yang bukan kelipatan p_i untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ adalah

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n - n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k) \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \ldots \\ &\quad + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

Jadi, bentuk umum dari fungsi tosien Euler adalah

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

atau dapat pula kita tuliskan sebagai

$$\phi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Penulisan $\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ berarti hasil kali dari bilangan-bilangan berbentuk $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ untuk setiap p yang habis membagi n.

Ada pula penulisan lain dari fungsi ini yang mungkin lebih mudah digunakan, yang dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

Misalkan $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$ dengan p_1, p_2, p_3, ..., dan p_k bilangan-bilangan prima berbeda serta e_1, e_2, e_3, ..., dan e_k bilangan-bilangan asli, maka

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\ &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}\left(\frac{p_1 - 1}{p_1}\right)\left(\frac{p_2 - 1}{p_2}\right)\left(\frac{p_3 - 1}{p_3}\right)\ldots\left(\frac{p_k - 1}{p_k}\right) \\ &= p_1^{e_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{e_2 - 1}(p_2 - 1)p_3^{e_3 - 1}(p_3 - 1)\ldots p_k^{e_k - 1}(p_k - 1)\end{aligned}$$

Jadi, fungsi tosien Euler ini dapat pula ditulis

$$\phi(n) = p_1^{e_1-1}(p_1-1)p_2^{e_2-1}(p_2-1)p_3^{e_3-1}(p_3-1)\ldots p_k^{e_k-1}(p_k-1)$$

atau

$$\phi(n) = \prod_{r=1}^{k} p_r^{e_r-1}(p_r-1)$$

Soal

Gunakanlah fungsi tosien Euler untuk menghitung banyaknya pecahan sederhana yang ada dalam setiap barisan berikut.

6.44 $\frac{1}{2010}, \frac{2}{2010}, \frac{3}{2010}, \ldots, \frac{2010}{2010}$

6.45 $\frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, \frac{3}{2011}, \ldots, \frac{2011}{2011}$

6.46 $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2012}, \frac{3}{2012}, \ldots, \frac{2012}{2012}$

6.47 Dengan terlebih dahulu mengumpulkan data, buatlah dugaan mengenai batasan nilai bilangan asli n agar banyaknya pecahan sederhana yang ada dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

ada sebanyak bilangan genap.

6.48 Apakah ada bilangan asli n sehingga dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

terdapat sebanyak:

a. 24 pecahan sederhana.

b. 37 pecahan sederhana.

Jika ada, carilah.

Petunjuk: Soal sebelumnya bisa membantu.

6.49 Carilah semua nilai bilangan asli n sehingga

$$\phi(n) = \frac{n}{2}$$

6.4.3 Menghitung Hasil Penjumlahan Pecahan Sederhana

Selain menghitung banyaknya pecahan sederhana, kita dapat pula menentukan hasil penjumlahan dari pecahan-pecahan sederhana tersebut. Fungsi yang menyatakan hasil penjumlahan bilangan-bilangan asli dari 1 hingga n yang relatif prima (tidak memiliki faktor persekutuan) dengan n kita notasikan dengan σ (*sigma*).

Hasil penjumlahan pecahan-pecahan sederhana dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

tentu sama dengan

$$\frac{\sigma(n)}{n}$$

Sebelumnya kita telah mengetahui bahwa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Marilah kita mulai dari yang paling sederhana.

1. Jika $n = p$, dengan p merupakan bilangan prima, maka jumlah bilangan-bilangan asli dari 1 hingga n yang relatif prima (tidak memiliki faktor persekutuan) dengan n adalah

$$\begin{aligned}\sigma(p) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) \\ &= \frac{1}{2}(p-1)p \\ &= \frac{1}{2}p^2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

2. Jika $n = p^e$ adalah pangkat dari sebuah bilangan prima, maka bilangan-bilangan asli kurang dari atau sama dengan n yang memiliki faktor persekutuan dengan n adalah kelipatan-kelipatan dari p, yaitu

$$p, 2p, 3p, \ldots, (p^{e-1})p$$

Jumlah dari semua bilangan ini adalah

$$\begin{aligned}\sigma_p(p^e) &= p + 2p + 3p + \ldots + (p^{e-1})p \\ &= p(1 + 2 + 3 + \ldots + p^{e-1}) \\ &= p \times \frac{1}{2} p^{e-1}(p^{e-1} + 1) \\ &= \frac{1}{2} p^e (p^{e-1} + 1)\end{aligned}$$

Maka jumlah bilangan-bilangan asli dari 1 hingga n yang tidak memiliki faktor persekutuan dengan n adalah

$$\begin{aligned}\sigma(p^e) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + p^e) - \left[p + 2p + 3p + \ldots + (p^{e-1})p\right] \\ &= \frac{1}{2} p^e (p^e + 1) - \frac{1}{2} p^e (p^{e-1} + 1) \\ &= \frac{1}{2} p^e (p^e - p^{e-1}) \\ &= \frac{1}{2} (p^e)^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

3. Kini ambil sembarang m yang habis dibagi p_1. Misalkan $\sigma_{p_1}(m)$ menyatakan jumlah bilangan asli kurang dari atau sama dengan m yang habis dibagi p_1. Bilangan-bilangan tersebut adalah

$$p_1,\ 2p_1,\ 3p_1,\ \ldots,\ \left(\frac{m}{p_1}\right)p_1$$

Jumlah dari semua bilangan ini adalah

$$\begin{aligned}\sigma_{p_1}(m) &= p_1 + 2p_1 + 3p_1 + \ldots + \left(\frac{m}{p_1}\right)p_1 \\ &= p_1\left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{m}{p_1}\right) \\ &= p_1 \times \frac{1}{2}\left(\frac{m}{p_1}\right)\left(\frac{m}{p_1} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{m}{p_1} + 1\right)\end{aligned}$$

Kemudian misalkan p_2 adalah bilangan prima lain yang juga habis membagi m. Misalkan $\sigma_{p_2}(m)$ menyatakan jumlah bilangan asli

kurang dari atau sama dengan m yang habis dibagi p_2. Bilangan-bilangan tersebut adalah

$$p_2, 2p_2, 3p_2, \ldots, \left(\frac{m}{p_2}\right)p_2$$

Jumlah dari semua bilangan ini adalah

$$\begin{aligned}\sigma_{p_2}(m) &= p_2 + 2p_2 + 3p_2 + \ldots + \left(\frac{m}{p_2}\right)p_2 \\ &= p_2\left(1+2+3+\ldots+\frac{m}{p_2}\right) \\ &= p_2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{m}{p_2}\right)\left(\frac{m}{p_2}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{p_2}+1\right)\end{aligned}$$

Namun kelipatan p_1p_2 terhitung sebanyak dua kali, yaitu

$$p_1p_2, 2p_1p_2, 3p_1p_2, \ldots, \left(\frac{m}{p_1p_2}\right)p_1p_2$$

Jumlah dari semua kelipatan p_1p_2 ini adalah

$$\begin{aligned}\sigma_{p_1p_2}(m) &= p_1p_2 + 2p_1p_2 + 3p_1p_2 + \ldots + \left(\frac{m}{p_1p_2}\right)p_1p_2 \\ &= p_1p_2\left(1+2+3+\ldots+\frac{m}{p_1p_2}\right) \\ &= p_1p_2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{m}{p_1p_2}\right)\left(\frac{m}{p_1p_2}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{p_1p_2}+1\right)\end{aligned}$$

Jika tidak ada bilangan prima selain p_1 dan p_2 yang habis membagi m, maka hasil penjumlahan bilangan-bilangan yang tidak memiliki faktor persekutuan dengan m adalah

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= (1+2+3+\ldots+m) - \left[\sigma_{p_1}(m) + \sigma_{p_2}(m) - \sigma_{p_1p_2}(m)\right] \\ &= \frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{p_1}+1\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{p_2}+1\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{p_1p_2}+1\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(m - \frac{m}{p_1} - \frac{m}{p_2} + \frac{m}{p_1p_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1p_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

4. Kini kita akan menemukan bentuk umum dari jumlah ini. Untuk itu, kita juga akan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk k himpunan. Jika

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$$

maka jumlah bilangan-bilangan yang bukan kelipatan p_i untuk i = 1, 2, 3, ..., k adalah

$\sigma(n)$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) - \left[\frac{1}{2}n\left(\frac{n}{p_1}+1\right) + \ldots + \frac{1}{2}n\left(\frac{n}{p_k}+1\right)\right] + \left[\frac{1}{2}n\left(\frac{n}{p_1p_2}+1\right)\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{2}n\left(\frac{n}{p_{k-1}p_k}+1\right)\right] + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2}n\left(\frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}n\left[(n+1) - \left[\left(\frac{n}{p_1}+1\right) + \ldots + \left(\frac{n}{p_k}+1\right)\right] + \left[\left(\frac{n}{p_1p_2}+1\right) + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{n}{p_{k-1}p_k}+1\right)\right] + \ldots + (-1)^k\left(\frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}n\left[n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k} + 1 - \left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\binom{k}{1}}\right) + \left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\binom{k}{2}}\right) + \ldots + (-1)^k(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}n\left[n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k} + \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}\right]$$

Dengan memerhatikan akibat 2 dalam subbab 2.8.3, diperoleh

$$= \frac{1}{2}n\left[n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \ldots \right.$$

$$\left. +(-1)^k \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k} + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}n\left[n - \left(\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) - \ldots \right.$$

$$\left. +(-1)^k \frac{n}{p_1p_2\ldots p_k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}n\left[n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Jadi, bentuk umumnya adalah

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

atau dapat pula kita tuliskan sebagai

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}n^2\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Berdasarkan hasil ini, kita dapat menghitung hasil penjumlahan semua pecahan sederhana dalam barisan

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

yaitu

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{2}n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{2}\phi(n)$$

Jadi, hasil penjumlahan dari semua pecahan sederhana tersebut sama dengan setengah dari banyaknya.

Soal

Hitunglah hasil penjumlahan dari semua pecahan sederhana yang ada dalam setiap barisan berikut.

6.50 $\frac{1}{375}, \frac{2}{375}, \frac{3}{375}, \ldots, \frac{375}{375}$

6.51 $\frac{1}{1001}, \frac{2}{1001}, \frac{3}{1001}, \ldots, \frac{1001}{1001}$

6.52 $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2012}, \frac{3}{2012}, \ldots, \frac{2012}{2012}$

6.5 Masalah Monty Hall

Pada bagian ini kita akan melihat suatu masalah terkenal dalam salah satu ruang lingkup matematika yaitu peluang. Masalah ini muncul dari sebuah acara kuis yang ditayangkan di televisi di Amerika Serikat yang bertajuk "*Let's Make a Deal*". Karena acara ini dibawakan oleh Monty Hall, masalah ini selanjutnya disebut sebagai *masalah monty hall*, atau kadang juga disebut *paradoks monty hall*. Suatu paradoks adalah hal yang terasa aneh namun dapat dibuktikan kebenarannya. Nanti kita akan melihat bahwa peluang yang akan kita analisis ternyata hasilnya tidak seperti yang kita bayangkan.

Masalah yang mengemuka pada sekitar tahun 1975 ini kurang lebih sebagai berikut. Peserta kuis dihadapkan pada tiga pintu. Di balik salah satu di antara ketiga pintu tersebut terdapat sebuah mobil sebagai hadiah utama, sedangkan di balik kedua pintu lainnya masing-masing terdapat seekor kambing sebagai hadiah yang dianggap mengecewakan. Mula-mula peserta tersebut diminta memilih salah satu pintu. Setelah salah satu pintu dipilih, Monty, sang pembawa acara yang telah mengetahui isi di balik ketiga pintu, membuka salah satu di antara dua pintu yang tidak dipilih oleh peserta yang ternyata berisi kambing. Kemudian Monty menanyakan kepada peserta tersebut, "Apakah Anda ingin menukar pilihan pintu Anda?". Di sini peserta boleh menukar pintu yang dipilihnya dengan satu pintu yang belum terbuka, jika diinginkan.

Hal yang menjadi pertanyaan adalah apakah peserta tersebut sebaiknya menukar pilihan pintunya atau tidak? Seberapa besar kemungkinan peserta tersebut untuk mendapatkan mobil jika ia menukar pilihan pintunya? Seberapa besar kemungkinannya pula jika ia tidak menukar pilihan pintunya?

Kita yang baru pertama kali berhadapan dengan masalah ini menduga bahwa besar kemungkinan peserta tersebut mendapatkan mobil jika ia menukar pilihan pintunya sama dengan besar kemungkinannya jika ia tidak menukar pilihan pintunya. Hal yang membuat kita berpikir demikian adalah setelah satu pintu yang berisi kambing telah dibuka oleh Monty, tentu tersisa dua pintu, yang satu berisi kambing dan yang lain berisi mobil. Benarkah dugaan kita ini? Kita akan mencoba menganalisis permasalahan ini dengan mendaftar semua kemungkinan yang ada. Kita akan melihat bahwa ternyata hasil yang nanti kita peroleh tidak seperti yang kita bayangkan.

Kita notasikan kedua kambing yang ada sebagai *K*, sedangkan mobil tersebut sebagai *M*. Kini kita akan menyusun objek *K*, *K*, dan *M* di balik ketiga pintu. Ada sebanyak tiga kemungkinan susunan, yaitu sebagai berikut.

No.	Pintu 1	Pintu 2	Pintu 3
1	*M*	*K*	*K*
2	*K*	*M*	*K*
3	*K*	*K*	*M*

Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan peserta tersebut selalu memilih pintu 1. Kita akan menganalisis ketiga kemungkinan susunan tersebut.

1. Kita perhatikan kemungkinan pertama. Pada pemilihan pertama, peserta memilih pintu 1 yang berisi mobil. Karena itu, sang pembawa acara mempunyai dua kemungkinan pintu lain yang dapat ia buka, yaitu pintu 2 dan pintu 3. Tanpa mengurangi keumuman, ia membuka pintu 2. Jadi sekarang peserta telah memilih pintu 1 yang berisi mobil, dan ia diberi kesempatan untuk menukar pilihan pintunya.
   a. Jika peserta tidak menukar pilihan pintu, ia mendapat mobil.
   b. Jika peserta menukar pilihan pintu, ia mendapat kambing.

2. Kita perhatikan kemungkinan kedua. Pada pemilihan pertama, peserta memilih pintu 1 yang berisi kambing. Karena itu, sang pembawa acara hanya mempunyai satu kemungkinan pintu lain yang dapat ia buka, yaitu pintu 3. Kemudian peserta diberi kesempatan untuk menukar pilihan pintunya.
   a. Jika peserta tidak menukar pilihan pintu, ia mendapat kambing.
   b. Jika peserta menukar pilihan pintu, ia mendapat mobil.
3. Kemungkinan ketiga berjalan seperti kemungkinan kedua. Awalnya peserta memilih pintu 1 yang berisi kambing. Karena itu, sang pembawa acara hanya mempunyai satu kemungkinan pintu lain yang dapat ia buka, yaitu pintu 2. Kemudian peserta diberi kesempatan untuk menukar pilihan pintunya.
   a. Jika peserta tidak menukar pilihan pintu, ia mendapat kambing.
   b. Jika peserta menukar pilihan pintu, ia mendapat mobil.

Perhatikan kembali analisis kita tersebut. Ternyata jika peserta tidak menukar pilihan pintu, peluang ia mendapat mobil adalah $\frac{1}{3}$. Tetapi jika peserta menukar pilihan pintu, peluang ia mendapat mobil adalah $\frac{2}{3}$. Hal ini berarti jika peserta tersebut ingin memperbesar peluang ia mendapatkan hadiah mobil tersebut, ia harus menukar pilihan pintunya.

Jadi, dugaan kita bahwa peluang mendapatkan mobil jika kita menukar dan tidak menukar pilihan pintu sama-sama $\frac{1}{2}$ adalah salah. Akan diperjelas bahwa dugaan ini semakin terlihat salah ketika kita memperbanyak jumlah pintu.

Misalkan sekarang ada 100 pintu. Di balik salah satu pintu itu terdapat hadiah mobil, sedangkan di balik ke-99 pintu yang lain terdapat hadiah kambing. Pertama-tama, peserta diminta memilih salah satu pintu. Dalam hal ini ada peluang sebesar hanya $\frac{1}{100}$ bahwa pintu yang dipilihnya berisi mobil. Kemudian sang pembawa acara membuka semua pintu lain yang tidak kita pilih kecuali satu pintu. Ke-98 pintu yang ia buka ternyata se-

muanya berisi kambing. Kemudian ia menawarkan apakah kita mau menukar pintu kita dengan satu pintu yang belum terbuka itu untuk mendapatkan mobil. Tentu jawaban kita adalah mau, sebab peluang bahwa satu pintu yang belum dibuka tersebut berisi mobil sangat besar, yaitu $\frac{99}{100}$. Hal ini disebabkan karena pintu yang tadi kita pilih merupakan pintu yang dipilih secara acak, sedangkan satu pintu yang belum dibuka tersebut dipilih oleh sang pembawa acara tidak secara acak, karena ia telah mengetahui semua isi pintunya.

Dengan memerhatikan hal tersebut, sekaligus kita melihat bahwa dalam masalah monty hall, apabila pintu-pintu yang ada semakin banyak, peluang kita mendapatkan mobil jika kita mengubah pilihan pintu kita akan semakin besar.

BAB VII
RUMUS REKURSIF

Sebelumnya kita telah mempelajari barisan dan deret bilangan. Misalnya kini kita memiliki barisan aritmetika berikut.

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

Jika suku-suku barisan ini kita tuliskan dalam bentuk yang memuat nomor sukunya, diperoleh

$$1 + 3 \times 1,\ 1 + 3 \times 2,\ 1 + 3 \times 3,\ 1 + 3 \times 4, \ldots$$

Sekarang apabila kita notasikan suku ke-n barisan ini adalah U_n, maka kita dapat mendefinisikan

$$U_n = 1 + 3n$$

Definisi ini disebut definisi yang *eksplisit*. Tetapi selain menggunakan definisi eksplisit, kita juga dapat mendefinisikan barisan ini secara *rekursif*. Pendefinisian suatu barisan secara rekursif berarti pendefinisian dalam bentuk dirinya sendiri, dalam arti U_n kita tuliskan dalam bentuk yang memuat suku lain. Sebagai contoh, barisan di atas dapat kita definisikan secara rekursif sebagai

$$U_n = U_{n-1} + 3$$

dengan $U_1 = 4$. Definisi ini lebih mudah kita dapatkan karena kita lebih cepat melihat bahwa setiap suku barisan tersebut merupakan tiga lebihnya dari suku sebelumnya, dan kita mulai dengan suku pertama 4.

Sebagai contoh lain, perhatikan barisan

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

yaitu barisan yang setiap sukunya diperoleh dengan menjumlahkan dua suku sebelumnya. Tentu jauh lebih mudah mendefinisikan barisan ini secara rekursif daripada secara eksplisit. Definisi barisan ini secara rekursif adalah

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

dengan $U_1 = 1$ dan $U_2 = 1$.

Kita dapat mendefinisikan suatu barisan secara rekursif dengan mudah. Namun, kesulitan dari rumus rekursif ini adalah sebagai berikut. Misalkan kita diberikan $U_1 = 1$ dan $U_n = 3U_{n-1} - 2$, dan kita diminta menentukan nilai U_{100}. Jika kita substitusikan $n = 100$ pada rumus tersebut, kita akan memperoleh $U_{100} = 3U_{99} - 2$. Artinya untuk memperoleh suku ke-100, kita memerlukan nilai suku ke-99. Untuk memperoleh suku ke-99, kita memerlukan nilai suku ke-98. Demikian seterusnya, dan ini sama artinya kita harus terlebih dahulu menentukan ke-99 nilai suku sebelumnya.

Hal seperti di atas tentu saja merepotkan dan memerlukan waktu lama. Pada bab ini, kita akan belajar bagaimana mengubah suatu bentuk rekursif menjadi bentuk yang eksplisit, sehingga kita dapat menghitung nilai suku ke berapapun dengan mudah.

7.1 Rumus Rekursif Orde Satu

Rumus rekursif orde satu adalah rumus rekursif di mana nilai suku ke-n hanya bergantung pada satu suku sebelumnya, yaitu suku ke-$(n - 1)$.

Rumus rekursif orde satu mulai muncul pada pembahasan barisan aritmetika dan geometri. Seperti pada pembahasan sebelumnya, barisan aritmetika merupakan pola bilangan yang setiap bilangan diperoleh dengan menjumlahkan bilangan sebelumnya dengan sebuah bilangan konstan. Artinya kita dapat menuliskan

$$\boxed{U_n = U_{n-1} + b}$$

Selanjutnya dengan menyubstitusikan nilai n dengan n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, ..., 2, 1, berturut-turut akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} + b \\
U_{n-1} &= U_{n-2} + b \\
U_{n-2} &= U_{n-3} + b \\
&\vdots \\
U_3 &= U_2 + b \\
U_2 &= U_1 + b \\
\hline
U_n &= U_1 + \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{\text{sebanyak } (n-1) \text{ kali}} \quad +
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{U_n = U_1 + (n-1)b}$$

Barisan geometri merupakan pola bilangan yang setiap bilangan diperoleh dengan mengalikan bilangan sebelumnya dengan sebuah bilangan konstan. Artinya kita dapat menuliskan

$$\boxed{U_n = pU_{n-1}}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai n dengan n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, ..., 2, 1, berturut-turut akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
U_n &= pU_{n-1} \\
U_{n-1} &= pU_{n-2} \\
U_{n-2} &= pU_{n-3} \\
&\vdots \\
U_3 &= pU_2 \\
U_2 &= pU_1
\end{aligned}
$$

Kini kita akan mencoba melakukan proses yang sama dengan barisan aritmetika di atas, yakni menghilangkan suku-suku U_{n-1}, U_{n-2}, U_{n-3}, ..., U_2 dengan cara menjumlahkan semua persamaan di atas. Untuk dapat menghilangkannya, setiap suku yang akan dihilangkan harus memiliki koefisien yang sama di ruas kiri dan kanan. Perhatikan teknik berikut. Kita kalikan persamaan ke-k dengan p^{k-1}.

$$\begin{array}{rl|c|rl}
U_n &= pU_{n-1} & \times 1 & U_n &= pU_{n-1} \\
U_{n-1} &= pU_{n-2} & \times p & pU_{n-1} &= p^2U_{n-2} \\
U_{n-2} &= pU_{n-3} & \times p^2 & p^2U_{n-2} &= p^3U_{n-2} \\
\vdots & & & \vdots & \\
U_3 &= pU_2 & \times p^{n-3} & p^{n-3}U_3 &= p^{n-2}U_2 \\
U_2 &= pU_1 & \times p^{n-2} & p^{n-2}U_2 &= p^{n-1}U_1 \\
\hline
 & & & U_n &= p^{n-1}U_1 \quad +
\end{array}$$

Kita telah dapat menemukan rumus eksplisit dari $U_n = U_{n-1} + b$ dan $U_n = pU_{n-1}$. Kini kita dapat mengembangkan untuk

$$U_n = pU_{n-1} + b$$

$$\begin{array}{rl|c|rl}
U_n &= pU_{n-1} + b & \times 1 & U_n &= pU_{n-1} + b \\
U_{n-1} &= pU_{n-2} + b & \times p & pU_{n-1} &= p^2U_{n-2} + pb \\
U_{n-2} &= pU_{n-3} + b & \times p^2 & p^2U_{n-2} &= p^3U_{n-3} + p^2b \\
\vdots & & & \vdots & \\
U_3 &= pU_2 + b & \times p^{n-3} & p^{n-3}U_3 &= p^{n-2}U_2 + p^{n-3}b \\
U_2 &= pU_1 + b & \times p^{n-2} & p^{n-2}U_2 &= p^{n-1}U_1 + p^{n-2}b \\
\hline
 & & & U_n &= p^{n-1}U_1 + b(1 + p + \ldots + p^{n-2}) \quad +
\end{array}$$

Untuk menentukan jumlah dari $1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-2}$ yang merupakan deret geometri, kita misalkan

$$S = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-2}$$

Kita kalikan kedua ruas dengan p, diperoleh

$$pS = p + p^2 + \ldots + p^{n-1}$$

Kurangkan dan kita memperoleh

$$S - pS = 1 + p^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - p)S = 1 - p^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{1 - p^{n-1}}{1 - p}$$

Jadi, kita mendapatkan

$$\boxed{U_n = p^{n-1}U_1 + b\left(\frac{1 - p^{n-1}}{1 - p}\right)}$$

Soal

Gunakan teknik di atas untuk menentukan bentuk eksplisit dari rumus-rumus rekursif berikut.

7.1 $U_n = U_{n-1} + 2$

7.2 $U_n = 3U_{n-1}$

7.3 $U_n = 3U_{n-1} + 2$

7.4 $U_n = 3U_{n-1} + 2n - 1$

7.5 $U_n = 3U_{n-1} + 3^n$

7.6 $U_n = 3U_{n-1} + 2^n$

7.7 $3U_n = 2U_{n-1} + n.2^n$

7.8 $U_n = 2U_{n-1} + n^2$

7.9 $U_n = -2U_{n-1} + n(n - 1)$

Dengan teknik seperti di atas, kita dapat memperoleh sebagai berikut.

Rumus Rekursif	Rumus Eksplisit
$U_n = pU_{n-1}$	$U_n = p^{n-1}U_1$
$U_n = pU_{n-1} + b$	$U_n = p^{n-1}U_1 + b\left(\frac{1-p^{n-1}}{1-p}\right)$
$U_n = pU_{n-1} + bn + c$	$U_n = p^{n-1}U_1 + c\left(\frac{1-p^{n-1}}{1-p}\right) + b\left[\frac{n-p^{n-1}}{1-p} - p\left[\frac{1-p^{n-1}}{(1-p)^2}\right]\right]$

Para pembaca dapat memperlihatkan bahwa bentuk-bentuk di atas dapat dituliskan dengan mengelompokkan setiap sukunya sebagai berikut.

Rumus Rekursif	Rumus Eksplisit
$U_n = pU_{n-1}$	$U_n = p^{n-1}U_1$
$U_n = pU_{n-1} + b$	$U_n = \left(U_1 - \frac{b}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{b}{1-p}$
$U_n = pU_{n-1} + bn + c$	$U_n = \left[U_1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bp}{(1-p)^2} - \frac{c}{1-p}\right]p^{n-1} + \left(\frac{b}{1-p}\right)n - \frac{bp}{(1-p)^2} + \frac{c}{1-p}$

Dengan melihat bentuk dari setiap rumus eksplisitnya, perhatikan bahwa kita dapat menggeneralisasikan bentuk umum dari pola di atas sebagai berikut.

Rumus Rekursif	Bentuk (Calon) Rumus Eksplisit
$U_n = pU_{n-1}$	$U_n = Ap^{n-1}$
$U_n = pU_{n-1} + b$	$U_n = Ap^{n-1} + A_0$
$U_n = pU_{n-1} + bn + c$	$U_n = Ap^{n-1} + A_1n + A_0$

dengan A, A_0, dan A_1 adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya.

Hal ini berlaku secara umum, yaitu

Rumus Rekursif	$U_n = pU_{n-1} + a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2n^2 + a_1n + a_0$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = Ap^{n-1} + A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_2n^2 + A_1n + A_0$

dengan A, A_0, A_1, ..., A_{k-1}, A_k adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya.

Kita dapat memanfaatkan bentuk umum atau calon rumus eksplisit ini untuk menentukan rumus eksplisit jika diketahui rumus rekursifnya. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 7.1.1

Tentukan rumus eksplisit dari U_n, jika

$$U_n = 3U_{n-1} + n^2 - n + 2$$

Jawab

Dengan memerhatikan bentuk rumus rekursifnya, maka kita calonkan rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = A \cdot 3^{n-1} + A_2 n^2 + A_1 n + A_0 \qquad (1)$$

dengan A, A_0, A_1, dan A_2 adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Sebelumnya kita perhatikan bahwa dari calon rumus eksplisit ini kita juga memperoleh

$$U_{n-1} = A \cdot 3^{n-2} + A_2(n-1)^2 + A_1(n-1) + A_0 \qquad (2)$$

dengan cara mengganti n dengan $n - 1$.

Jika (1) dan (2) kita substitusikan ke dalam rumus rekursif yang diketahui, maka kita peroleh

$$U_n = 3U_{n-1} + n^2 - n + 2$$

$$\Leftrightarrow A \cdot 3^{n-1} + A_2 n^2 + A_1 n + A_0 = 3\left[A \cdot 3^{n-2} + A_2(n-1)^2 + A_1(n-1) + A_0\right] + n^2 - n + 2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{A \cdot 3^{n-1}} + A_2 n^2 + A_1 n + A_0 = \cancel{A \cdot 3^{n-1}} + 3A_2(n-1)^2 + 3A_1(n-1) + 3A_0 + n^2 - n + 2$$

$$\Leftrightarrow A_2 n^2 + A_1 n + A_0 = 3A_2 n^2 - 6A_2 n + 3A_2 + 3A_1 n - 3A_1 + 3A_0 + n^2 - n + 2$$

$$\Leftrightarrow A_2 n^2 + A_1 n + A_0 = (3A_2 + 1)n^2 + (-6A_2 + 3A_1 - 1)n + (3A_2 - 3A_1 + 3A_0 + 2)$$

Agar kedua ruas sama, maka koefisien dari setiap sukunya harus sama, maka kita memperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} A_2 = 3A_2 + 1 \\ A_1 = -6A_2 + 3A_1 - 1 \\ A_0 = 3A_2 - 3A_1 + 3A_0 + 2 \end{cases}$$

Dari persamaan pertama dengan mudah kita mendapatkan

$$A_2 = -\frac{1}{2}$$

Jika hasil ini disubstitusikan ke dalam persamaan kedua, diperoleh

$$A_1 = -1$$

Akhirnya kedua hasil ini disubstitusikan ke dalam persamaan ketiga, diperoleh

$$A_0 = -\frac{7}{4}$$

Dari sini kita sudah mendapatkan bentuk eksplisit

$$U_n = A \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{7}{4}$$

Tetapi nilai A belum kita dapatkan. Kita dapat menyatakannya dalam salah satu suku, misalnya suku pertama, yaitu U_1. Nilai U_1 ini adalah

$$U_1 = A \cdot 3^{1-1} - \frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_1 = A - \frac{13}{4}$$

oleh karena itu kita menemukan

$$A = U_1 + \frac{13}{4}$$

Jadi, rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = \left(U_1 + \frac{13}{4}\right)3^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{7}{4}$$

Pada perkembangan selanjutnya, dengan investigasi serupa kita juga dapat menarik kesimpulan berikut.

Rumus Rekursif	$U_n = pU_{n-1} + (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0)p^n$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = Ap^{n-1} + (A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \ldots + A_2 n^2 + A_1 n + A_0)np^n$

dengan A, A_0, A_1, ..., A_{k-1}, A_k adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Selain itu, diperoleh pula sebagai berikut.

Rumus Rekursif	$U_n = pU_{n-1} + (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0)r^n$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = Ap^{n-1} + (A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \ldots + A_2 n^2 + A_1 n + A_0)r^n$

dengan A, A_0, A_1, ..., A_{k-1}, A_k adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Tetapi hal ini hanya berlaku untuk $r \neq p$. Perhatikan satu contoh lain berikut.

Contoh 7.1.2

Tentukan rumus eksplisit dari U_n, jika

$$U_n = 2U_{n-1} + (3n - 1)\cdot 2^n$$

Jawab

Dengan memerhatikan bentuk rumus rekursifnya, maka kita calonkan rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = A\cdot 2^{n-1} + (A_1 n + A_0)\cdot n\cdot 2^n \qquad (1)$$

dengan A, A_0, dan A_1 adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya. Sebelumnya kita perhatikan bahwa dari calon rumus eksplisit ini kita juga memperoleh

$$U_{n-1} = A\cdot 2^{n-2} + [A_1(n-1) + A_0]\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1} \qquad (2)$$

dengan cara mengganti n dengan $n - 1$.

Jika (1) dan (2) kita substitusikan ke dalam rumus rekursif yang diketahui, maka kita peroleh

$$\begin{aligned}
U_n &= 2U_{n-1} + (3n-1)\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad A\cdot 2^{n-1} + (A_1 n + A_0)\cdot n\cdot 2^n &= 2\left[A\cdot 2^{n-2} + [A_1(n-1) + A_0]\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1}\right] \\
&\quad + (3n-1)\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad \cancel{A\cdot 2^{n-1}} + (A_1 n + A_0)\cdot n\cdot 2^n &= \cancel{A\cdot 2^{n-1}} + 2[A_1(n-1) + A_0]\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1} \\
&\quad + (3n-1)\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad (A_1 n^2 + A_0 n)\cdot 2^n &= [A_1(n-1) + A_0]\cdot(n-1)\cdot 2^n + (3n-1)\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad (A_1 n^2 + A_0 n)\cdot 2^n &= \left[A_1(n-1)^2 + A_0(n-1) + 3n - 1\right]\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad (A_1 n^2 + A_0 n)\cdot 2^n &= \left[A_1 n^2 - 2A_1 n + A_1 + A_0 n - A_0 + 3n - 1\right]\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad (A_1 n^2 + A_0 n)\cdot 2^n &= \left[A_1 n^2 + (-2A_1 + A_0 + 3)n + (A_1 - A_0 - 1)\right]\cdot 2^n
\end{aligned}$$

Agar kedua ruas sama, maka koefisien dari setiap sukunya harus sama, maka kita memperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} A_0 = -2A_1 + A_0 + 3 \\ 0 = A_1 - A_0 - 1 \end{cases}$$

Jawab dari sistem persamaan ini adalah

$$A_0 = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \frac{3}{2}$$

Dari sini kita sudah mendapatkan bentuk eksplisit

$$U_n = A \cdot 2^{n-1} + \left(\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot 2^n$$

Dari sini diperoleh nilai U_1 adalah

$$U_1 = A \cdot 2^{1-1} + \left(\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 2^1$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_1 = A + 4$$

oleh karena itu kita menemukan

$$A = U_1 - 4$$

Jadi, rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = (U_1 - 4)2^{n-1} + \left(\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot 2^n$$

Metode yang telah kita lakukan tadi disebut *metode koefisien tak tentu*. Langkah-langkah dari metode ini adalah pertama-tama kita mencalonkan bentuk U_n, kemudian dari calon ini kita tulis U_{n-1} dengan cara mengganti n dengan $n - 1$. Substitusikan calon U_n dan U_{n-1} ke rumus rekursif, kemudian kita samakan koefisien dari setiap sukunya, sehingga kita memperoleh sistem persamaan yang menghasilkan nilai A_0, A_1, ..., A_{k-1}, dan A_k. Terakhir, nilai A kita tentukan dalam U_1.

Hal yang paling perlu diperhatikan di sini adalah ketika mencalonkan rumus eksplisit U_n. Untuk itu, berikut akan diberikan beberapa contoh cara mencalonkan rumus eksplisit U_n tersebut.

Contoh Rumus Rekursif	Bentuk (Calon) Rumus Eksplisit
$U_n = 2U_{n-1}$	$U_n = Ap^{n-1}$
$U_n = -U_{n-1} + 4$	$U_n = Ap^{n-1} + A_0$
$U_n = 4U_{n-1} + n^2 - 1$	$U_n = Ap^{n-1} + A_2n^2 + A_1n + A_0$
$U_n = 3U_{n-1} + n^3$	$U_n = Ap^{n-1} + A_3n^3 + A_2n^2 + A_1n + A_0$
$U_n = 5U_{n-1} + (2n - 1) \cdot 5^n$	$U_n = Ap^{n-1} + (A_1n + A_0) \cdot n \cdot 5^n$
$U_n = 5U_{n-1} + (2n - 1) \cdot 3^n$	$U_n = Ap^{n-1} + (A_1n + B_0) \cdot 3^n$
$U_n = 3U_{n-1} + n^2 + 2^n$	$U_n = Ap^{n-1} + A_2n^2 + A_1n + A_0 + B \cdot 2^n$
$U_n = 2U_{n-1} + n + (n - 3) \cdot 3^n$	$U_n = Ap^{n-1} + A_1n + A_0 + (B_1n + B_0) \cdot 3^n$

Soal

Gunakan metode koefisien tak tentu untuk menentukan bentuk eksplisit dari rumus-rumus rekursif berikut.

7.10 $U_n = 4U_{n-1} + 1$

7.11 $2U_n = 3U_{n-1} + 6n - 2$

7.12 $U_n = -2U_{n-1} + n^2$

7.13 $U_n = -U_{n-1} + (2n - 1)(n - 1)$

7.14 $U_n = 5U_{n-1} + (3 - n)\cdot 2^n$

7.15 $U_n = 2U_{n-1} + (n^2 - n + 1)\cdot 3^n$

7.16 $U_n = 6U_{n-1} - n^2 \cdot 6^n$

7.17 $U_n = 2U_{n-1} + n + (2n - 1)\cdot 3^n$

7.18 $U_n = -3U_{n-1} + (n - 4)\cdot 3^n + 1$

7.19 $U_n = 2U_{n-1} + (n - 1)(2^n + 3^n) - 1$

7.2 Rumus Rekursif Orde Dua

Kita telah membahas rumus rekursif orde satu, di mana nilai suku ke-n hanya bergantung pada satu suku sebelumnya, yaitu suku ke-$(n - 1)$. Pada pengembangannya, bagaimana apabila nilai dari suku barisan tersebut tidak hanya bergantung pada satu suku sebelumnya, melainkan dua suku, yakni suku ke-$(n - 1)$ dan $(n - 2)$? Rumus rekursif yang demikian disebut rumus rekursif orde dua.

Gagasan untuk mengubah suatu rumus rekursif orde dua menjadi rumus eksplisit adalah dengan terlebih dahulu mengubahnya menjadi rumus rekursif orde satu. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 7.2.1

Diketahui sebuah barisan bilangan yang memenuhi $U_1 = 1$, $U_2 = 4$, dan $U_n = 4U_{n-1} - 4U_{n-2}$.

a. Misalkan $V_n = U_n - 2U_{n-1}$, maka tunjukkan bahwa $V_n = 2V_{n-1}$.
b. Carilah V_n dinyatakan dalam n.
c. Carilah U_n dinyatakan dalam n.

Jawab

a. Kita akan berusaha menyatakan rumus rekursif

$$U_n = 4U_{n-1} - 4U_{n-2}$$

dalam variabel baru yaitu V_n, agar mengubahnya menjadi rumus rekursif berorde satu dalam V. Kita kurangkan kedua ruas dengan $2U_{n-1}$ sehingga ruas kiri menjadi V_n.

$$\begin{aligned} U_n &= 4U_{n-1} - 4U_{n-2} \\ \Leftrightarrow \quad U_n - 2U_{n-1} &= 4U_{n-1} - 2U_{n-1} - 4U_{n-2} \\ \Leftrightarrow \quad V_n &= 2U_{n-1} - 4U_{n-2} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita upayakan agar ruas kanan dapat dituliskan dalam V_{n-1}. Kita mengetahui bahwa $V_{n-1} = U_{n-1} - 2U_{n-2}$, maka

$$\begin{aligned} V_n &= 2(U_{n-1} - 2U_{n-2}) \\ \Leftrightarrow \quad V_n &= 2V_{n-1} \qquad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

b. Selanjutnya kita menentukan bentuk eksplisit dari V_n.

$$\begin{array}{rcl|c|rcl} V_n &=& 2V_{n-1} & \times 1 & V_n &=& 2V_{n-1} \\ V_{n-1} &=& 2V_{n-2} & \times 2 & 2V_{n-1} &=& 2^2V_{n-2} \\ V_{n-2} &=& 2V_{n-3} & \times 2^2 & 2^2V_{n-2} &=& 2^3V_{n-2} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ V_3 &=& 2V_2 & \times 2^{n-3} & 2^{n-3}V_3 &=& 2^{n-2}V_2 \\ \hline & & & & V_n &=& 2^{n-2}V_2 \end{array} +$$

Kemudian kita mengetahui bahwa

$$\begin{aligned} V_2 &= U_2 - 2U_1 \\ &= 4 - 2(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$V_n = 2^{n-1}$$

c. Dari pemisalan diketahui $V_n = U_n - 2U_{n-1}$, maka kita dapat menuliskan $U_n = 2U_{n-1} + V_n$, atau

$$U_n = 2U_{n-1} + 2^{n-1}$$

Dari sini kita dapat menentukan bentuk eksplisit dari U_n.

$$\begin{array}{rl|c|rl} U_n &= 2U_{n-1}+2^{n-1} & \times 1 & U_n &= 2U_{n-1}+2^{n-1} \\ U_{n-1} &= 2U_{n-2}+2^{n-2} & \times 2 & 2U_{n-1} &= 2^2U_{n-2}+2^{n-1} \\ U_{n-2} &= 2U_{n-3}+2^{n-3} & \times 2^2 & 2^2U_{n-2} &= 2^3U_{n-3}+2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ U_3 &= 2U_2+2^2 & \times 2^{n-3} & 2^{n-3}U_3 &= 2^{n-2}U_2+2^{n-1} \\ \hline & & & U_n &= 2^{n-2}U_2+(n-2)(2^{n-1}) \quad + \end{array}$$

Karena $U_2 = 4$ maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} U_n &= 2^{n-2}(4)+(n-2)\left(2^{n-1}\right) \\ &= 2^n + n\cdot 2^{n-1} - 2^n \\ &= n\cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

Contoh 7.2.1 di atas memberikan gagasan untuk menentukan rumus eksplisit dari suatu rumus rekursif orde dua. Penggunaan teknik penyelesaian ini secara umum ditunjukkan pada contoh berikut ini.

Contoh 7.2.2

Tentukan rumus eksplisit dari U_n, jika

$$U_n = U_{n-1} + 6U_{n-2}$$

Jawab

Seperti contoh 7.2.1 di atas, ide untuk menyelesaikan ini adalah dengan menggunakan variabel lain, yaitu V_n, untuk menjadikan bentuk tersebut sebagai rumus rekursif berorde satu. Dalam hal ini kita misalkan

$$V_n = U_n - \alpha U_{n-1}$$

dengan nilai α akan ditentukan nantinya.

Kemudian persamaan

$$U_n = U_{n-1} + 6U_{n-2}$$

kita kurangi αU_{n-1} pada kedua ruas sehingga ruas kiri menjadi V_n.

$$U_n - \alpha U_{n-1} = U_{n-1} - \alpha U_{n-1} + 6U_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad V_n = (1-\alpha)\left(U_{n-1} + \frac{6}{1-\alpha}U_{n-2}\right)$$

Bentuk yang terakhir ini dapat dituliskan sebagai

$$V_n = (1-\alpha)V_{n-1}$$

dan hanya berlaku jika

$$\alpha = \frac{6}{1-\alpha} \qquad (1)$$

Dengan demikian persamaan tersebut telah berubah menjadi rumus rekursif berorde satu dalam variabel V. Kita dapat menentukan bentuk eksplisit dari V_n.

$$\begin{array}{rl|c|rl}
V_n &= (1-\alpha)V_{n-1} & \times 1 & V_n &= (1-\alpha)V_{n-1} \\
V_{n-1} &= (1-\alpha)V_{n-2} & \times(1-\alpha) & (1-\alpha)V_{n-1} &= (1-\alpha)^2 V_{n-2} \\
V_{n-2} &= (1-\alpha)V_{n-3} & \times(1-\alpha)^2 & (1-\alpha)^2 V_{n-2} &= (1-\alpha)^3 V_{n-3} \\
&\vdots & & &\vdots \\
V_3 &= (1-\alpha)V_2 & \times(1-\alpha)^{n-3} & (1-\alpha)^{n-3}V_3 &= (1-\alpha)^{n-2}V_2 \\
\hline
& & & V_n &= (1-\alpha)^{n-2}V_2 \quad +
\end{array}$$

Selanjutnya, dari pemisalan diketahui

$$V_n = U_n - \alpha U_{n-1}$$

maka

$$U_n = \alpha U_{n-1} + V_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad U_n = \alpha U_{n-1} + (1-\alpha)^{n-2}V_2$$

Dari sini dapat dicari bentuk eksplisit dari U_n.

$$\begin{array}{rl|c|rl}
U_n &= \alpha U_{n-1} + (1-\alpha)^{n-2}V_2 & \times 1 & U_n &= \alpha U_{n-1} + (1-\alpha)^{n-2}V_2 \\
U_{n-1} &= \alpha U_{n-2} + (1-\alpha)^{n-3}V_2 & \times\alpha & \alpha U_{n-1} &= \alpha^2 U_{n-2} + \alpha(1-\alpha)^{n-3}V_2 \\
U_{n-2} &= \alpha U_{n-3} + (1-\alpha)^{n-4}V_2 & \times\alpha^2 & \alpha^2 U_{n-2} &= \alpha^3 U_{n-3} + \alpha^2(1-\alpha)^{n-4}V_2 \\
&\vdots & & &\vdots \\
U_3 &= \alpha U_2 + (1-\alpha)^1 V_2 & \times\alpha^{n-3} & \alpha^{n-3}U_3 &= \alpha^{n-2}U_2 + \alpha^{n-3}(1-\alpha)^1 V_2
\end{array}$$

Jumlah dari semua persamaan ini adalah

$$U_n = \alpha^{n-2}U_2 + \left[(1-\alpha)^{n-2} + \alpha(1-\alpha)^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-3}(1-\alpha)^1\right]V_2$$

Selanjutnya kita misalkan

$$S = (1-\alpha)^{n-2} + \alpha(1-\alpha)^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-3}(1-\alpha)^1$$

Kalikan kedua ruas dengan rasionya yaitu $\alpha(1 - \alpha)^{-1}$, didapatkan

$$\alpha(1 - \alpha)^{-1}S = \alpha(1 - \alpha)^{n-3} + \alpha^2(1 - \alpha)^{n-4} + \ldots + \alpha^{n-2}(1 - \alpha)^0$$

Kurangkan sehingga diperoleh

$$S - \alpha(1-\alpha)^{-1}S = (1-\alpha)^{n-2} - \alpha^{n-2}(1-\alpha)^0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)S = (1-\alpha)^{n-2} - \alpha^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\right)S = (1-\alpha)^{n-2} - \alpha^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\left[(1-\alpha)^{n-2} - \alpha^{n-2}\right]$$

Jadi, bentuk eksplisit dari U_n adalah

$$U_n = \alpha^{n-2}U_2 + \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\left[(1-\alpha)^{n-2} - \alpha^{n-2}\right]V_2$$

Setelah kita menemukan bentuk eksplisit dari U_n, kita ingat kembali persamaan (1), yaitu hal ini hanya terjadi jika

$$\alpha = \frac{6}{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha+2)(\alpha-3) = 0$$

Maka ada dua kemungkinan, yaitu $\alpha = -2$ atau $\alpha = 3$.

(1) Kemungkinan pertama,

$\alpha = -2 \rightarrow V_2 = U_2 + 2U_1$, maka

$$U_n = (-2)^{n-2}U_2 + \frac{1-(-2)}{1-2(-2)}\left[(1-(-2))^{n-2} - (-2)^{n-2}\right](U_2 + 2U_1)$$

$$= (-2)^{n-2}U_2 + \frac{3}{5}\left[3^{n-2} - (-2)^{n-2}\right](U_2 + 2U_1)$$

(2) Kemungkinan kedua,

$\alpha = 3 \rightarrow V_2 = U_2 - 3U_1$, maka

$$U_n = 3^{n-2}U_2 + \frac{1-3}{1-2(3)}\left[(1-3)^{n-2} - (3)^{n-2}\right](U_2 - 3U_1)$$

$$= 3^{n-2}U_2 + \frac{2}{5}\left[(-2)^{n-2} - 3^{n-2}\right](U_2 - 3U_1)$$

Para pembaca dapat mencoba menyederhanakan kedua bentuk yang diperoleh ini. Setelah disederhanakan, ternyata tampak bahwa hasil yang diperoleh adalah sama. Jadi, untuk selanjutnya, kita cukup mengerjakan salah satu kemungkinan saja. Untuk mempercepat pengerjaan, berusahalah untuk memilih kemungkinan yang menghasilkan bentuk yang dapat kita sederhanakan dengan lebih mudah.

Soal

Gunakan teknik di atas untuk menentukan bentuk eksplisit dari rumus-rumus rekursif berikut.

7.20 $U_n = 2U_{n-1} + 8U_{n-2}$

7.21 $U_n = 6U_{n-1} - 9U_{n-2}$

7.22 $5U_n = -4U_{n-1} + U_{n-2}$

7.23 $U_n = -2U_{n-1} + 3U_{n-2} + 1$

7.24 $2U_n = -U_{n-1} + U_{n-2} + 3^n$

7.25 $U_n = 3U_{n-1} - 2U_{n-2} + n$

Kini kita akan melihat bagaimana metode koefisien tak tentu juga dapat diterapkan dalam rumus rekursif orde dua. Kita perhatikan hasil-hasil berikut.

Rumus Rekursif	Rumus Eksplisit
$U_n = U_{n-1} + 6U_{n-2}$	$U_n = \left(-\frac{3}{10}U_1 + \frac{1}{10}U_2\right)(-2)^n + \left(\frac{2}{15}U_1 + \frac{1}{15}U_2\right)\cdot 3^n$
$U_n = 2U_{n-1} + 8U_{n-2}$	$U_n = \left(-\frac{1}{3}U_1 + \frac{1}{12}U_2\right)(-2)^n + \left(\frac{1}{12}U_1 + \frac{1}{24}U_2\right)\cdot 4^n$
$U_n = 3U_{n-1} + 10U_{n-2}$	$U_n = \left(-\frac{5}{14}U_1 + \frac{1}{14}U_2\right)(-2)^n + \left(\frac{2}{35}U_1 + \frac{1}{35}U_2\right)\cdot 5^n$

Dari ketiga hasil di atas, jelas terlihat bahwa jika kita mempunyai rumus rekursif

$$U_n = p_1 U_{n-1} + p_2 U_{n-2}$$

maka kita dapat mencalonkan rumus eksplisit

$$U_n = P_1 \alpha_1^n + P_2 \alpha_2^n$$

dengan P_1 dan P_2 adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya, sedangkan α_1 dan α_2 tidak lain adalah akar-akar dari persamaan kuadrat yang menjadi syarat berlakunya rumus eksplisit tersebut. Persamaan kuadrat itu dapat ditentukan dengan cara seperti sebelumnya.

Kita misalkan

$$V_n = U_n - \alpha U_{n-1}$$

dengan nilai α akan ditentukan nantinya.

Kemudian persamaan

$$U_n = p_1 U_{n-1} + p_2 U_{n-2}$$

kita kurangi αU_{n-1} pada kedua ruas sehingga ruas kiri menjadi V_n.

$$U_n - \alpha U_{n-1} = p_1 U_{n-1} - \alpha U_{n-1} + p_2 U_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_n = (p_1 - \alpha)\left(U_{n-1} + \frac{p_2}{p_1 - \alpha} U_{n-2}\right)$$

Bentuk yang terakhir ini dapat dituliskan sebagai

$$V_n = (p_1 - \alpha) V_{n-1}$$

dan hanya berlaku jika

$$-\alpha = \frac{p_2}{p_1 - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - p_1 \alpha - p_2 = 0$$

Inilah persamaan kuadrat yang dimaksud.

Jadi, kita telah memperoleh sebagai berikut.

Rumus Rekursif	Bentuk (Calon) Rumus Eksplisit
$U_n = p_1 U_{n-1} + p_2 U_{n-2}$	$U_n = P_1 \alpha_1^n + P_2 \alpha_2^n$ dengan α_1 dan α_2 akar-akar persamaan kuadrat $\alpha_1 - p_1 \alpha - p_2 = 0$

dengan P_1 dan P_2 adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya.

Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa dalam rumus rekursif orde dua ini juga berlaku aturan pencalonan rumus eksplisit serupa dengan yang telah kita lihat dalam rumus rekursif orde satu, yaitu sebagai berikut.

Rumus Rekursif	$U_n = p_1U_{n-1} + p_2U_{n-2} + a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2n^2 + a_1n + a_0$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_2n^2 + A_1n + A_0$

dengan $P_1, P_2, A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$ adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya, sedangkan α_1 dan α_2 akar-akar dari persamaan kuadrat $\alpha^2 - p_1\alpha - p_2 = 0$.

Rumus Rekursif	$U_n = p_1U_{n-1} + p_2U_{n-2} + (a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2n^2 + a_1n + a_0)r^n$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_2n^2 + A_1n + A_0)r^n$

dengan $P_1, P_2, A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$ adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya, sedangkan α_1 dan α_2 akar-akar dari persamaan kuadrat $\alpha^2 - p_1\alpha - p_2 = 0$. Tetapi hal ini hanya berlaku untuk $r \neq \alpha_1$ dan $r \neq \alpha_2$.

Jika $r = \alpha_1$, maka berlaku pencalonan berikut.

Rumus Rekursif	$U_n = p_1U_{n-1} + p_2U_{n-2} + (a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2n^2 + a_1n + a_0)\alpha_1^n$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_2n^2 + A_1n + A_0)n\alpha_1^n$

Jika $r = \alpha_2$, maka berlaku pencalonan berikut.

Rumus Rekursif	$U_n = p_1U_{n-1} + p_2U_{n-2} + (a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2n^2 + a_1n + a_0)\alpha_2^n$
Calon Rumus Eksplisit	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \ldots + A_2n^2 + A_1n + A_0)n\alpha_2^n$

dengan $P_1, P_2, A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$ adalah bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya, sedangkan α_1 dan α_2 akar-akar dari persamaan kuadrat $\alpha^2 - p_1\alpha - p_2 = 0$.

Perhatikan satu contoh berikut.

Contoh 7.2.2

Tentukan rumus eksplisit dari U_n, jika

$$U_n = 2U_{n-1} + 3U_{n-2} + 3^n$$

Jawab

Mula-mula kita hitung α_1 dan α_2 yaitu akar-akar dari persamaan kuadrat

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha - 3)(\alpha + 1) = 0$$

yaitu $\alpha_1 = 3$ dan $\alpha_2 = -1$ (sebaliknya juga dapat).

Jadi, calon rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = P_1 \cdot 3^n + P_2(-1)^n + A_0 \cdot n \cdot 3^n \qquad (1)$$

Dari calon rumus eksplisit ini kita juga memperoleh

$$U_{n-1} = P_1 \cdot 3^{n-1} + P_2(-1)^{n-1} + A_0 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1} \qquad (2)$$

$$U_{n-2} = P_1 \cdot 3^{n-2} + P_2(-1)^{n-2} + A_0 \cdot (n-2) \cdot 3^{n-2} \qquad (3)$$

dengan cara mengganti n dengan $n - 1$ dan $n - 2$.

Jika (1), (2), dan (3) kita substitusikan ke dalam rumus rekursif yang diketahui, maka kita peroleh

$$U_n = 2U_{n-1} + 3U_{n-2} + 3^n$$

$$P_1 \cdot 3^n + P_2(-1)^n + A_0 \cdot n \cdot 3^n = 2\left[P_1 \cdot 3^{n-1} + P_2(-1)^{n-1} + A_0 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1}\right]$$
$$+3\left[P_1 \cdot 3^{n-2} + P_2(-1)^{n-2} + A_0 \cdot (n-2) \cdot 3^{n-2}\right] + 3^n$$

$$(A_0 n + P_1) \cdot 3^n + P_2(-1)^n = 2P_1 \cdot 3^{n-1} + 2P_2(-1)^{n-1} + 2A_0 \cdot n \cdot 3^{n-1} - 2A_0 \cdot 3^{n-1}$$
$$+ P_1 \cdot 3^{n-1} + 3P_2(-1)^{n-2} + A_0 \cdot n \cdot 3^{n-1} - 2A_0 \cdot 3^{n-1} + 3^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (A_0 n + P_1) \cdot 3^n + P_2(-1)^n = \frac{2}{3}P_1 \cdot 3^n - 2P_2(-1)^n + \frac{2}{3}A_0 n \cdot 3^n - \frac{2}{3}A_0 \cdot 3^n$$

$$\Leftrightarrow \quad + \frac{1}{3}P_1 \cdot 3^n + 3P_2(-1)^n + \frac{1}{3}A_0 n \cdot 3^n - \frac{2}{3}A_0 \cdot 3^n + 3^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (A_0 n + P_1) \cdot 3^n + P_2(-1)^n = \left(A_0 n + P_1 - \frac{4}{3}A_0 + 1\right) \cdot 3^n + P_2(-1)^n$$

Agar kedua ruas sama, maka koefisien dari setiap sukunya harus sama, maka kita memperoleh

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}A_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow A_0 = \frac{3}{4}$$

Dari sini kita sudah mendapatkan bentuk eksplisit

$$U_n = P_1 \cdot 3^n + P_2(-1)^n + \frac{3}{4} \cdot n \cdot 3^n$$

Dari sini diperoleh nilai U_1 adalah

$$U_1 = P_1 \cdot 3^1 + P_2(-1)^1 + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 3^1$$

$$U_1 = 3P_1 - P_2 + \frac{9}{4}$$

Dari sini pula diperoleh nilai U_2 adalah

$$U_2 = P_1 \cdot 3^2 + P_2(-1)^2 + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 3^2$$

$$\Leftrightarrow \quad U_2 = 9P_1 + P_2 + \frac{27}{2}$$

Maka dari nilai U_1 dan U_2 ini kita memperoleh sistem persamaan

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3P_1 - P_2 = U_1 - \frac{9}{4} \\ 9P_1 + P_2 = U_2 - \frac{27}{2} \end{cases}$$

Dengan eliminasi dan substitusi kita dapat memperoleh jawab dari sistem persamaan ini, yaitu

$$P_1 = \frac{1}{12}U_1 + \frac{1}{12}U_2 - \frac{21}{16}$$

$$P_2 = -\frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{4}U_2 - \frac{27}{16}$$

Jadi, rumus eksplisitnya adalah

$$U_n = \left(\frac{1}{12}U_1 + \frac{1}{12}U_2 - \frac{21}{16}\right)3^n + \left(-\frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{4}U_2 - \frac{27}{16}\right)(-1)^n + \frac{3}{4}n \cdot 3^n$$

Berikut akan diberikan beberapa contoh pencalonan rumus eksplisit untuk rumus rekursif orde dua.

Contoh Rumus Rekursif	Bentuk (Calon) Rumus Eksplisit
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2}$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + A_1n + A_0$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + 4n^3$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + A_3n^3 + A_2n^2 + A_1n + A_0$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + (n - 6)\cdot 5^n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_1n + A_0)\cdot 5^n$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + 3^n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + A_0\cdot n\cdot 3^n$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + (n^2 - 5)3^n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_2n^2 + A_1n + A_0)\cdot n\cdot 3^n$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} - n\cdot 2^n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_1n + A_0)\cdot n\cdot 2^n$
$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + (n - 1)2^n + 3^n - 5^n$	$U_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n + (A_1n + A_0)\cdot n\cdot 2^n + B_0\cdot n\cdot 3^n + C_0\cdot 5^n$

Soal

Gunakan metode koefisien tak tentu untuk menentukan bentuk eksplisit dari rumus-rumus rekursif berikut.

7.26 $U_n = 7U_{n-1} + 8U_{n-2}$

7.27 $6U_n = U_{n-1} + 15U_{n-2} - 3$

7.28 $U_n = -6U_{n-1} - 5U_{n-2} - n$

7.29 $3U_n = -U_{n-1} + 2U_{n-2} + n^2$

7.30 $4U_n = 12U_{n-1} - 9U_{n-2} - 2^n$

7.31 $U_n = 4U_{n-1} - 3U_{n-2} + 4^n$

7.32 $U_n = 4U_{n-1} + 5U_{n-2} + (3n - 2)\cdot 5^n$

7.3 Beberapa Masalah yang Berkaitan dengan Rumus Rekursif

7.3.1 Masalah Jabat Tangan

Salah satu masalah terkenal dalam matematika yang berkaitan dengan rumus rekursif adalah masalah jabat tangan. Kita telah beberapa kali

membahas masalah jabat tangan ini. Kini kita akan mengumpulkan berbagai cara pandangnya.

1. Banyaknya jabat tangan maksimal yang dapat dilakukan oleh n orang sama dengan banyaknya cara memilih 2 objek dari n objek yang tersedia tanpa memerhatikan urutan, yaitu

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. Masing-masing orang harus berjabat tangan dengan setiap orang lainnya. Karena terdapat n orang yang masing-masing berjabat tangan dengan $n - 1$ orang yang lain, maka ada sebanyak $n \times (n - 1)$ jabat tangan. Tetapi karena jabat tangan bersifat simetris maka ada sebanyak

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

jabat tangan.

3. Cara pandang secara rekursif adalah sebagai berikut.

Misalkan U_n menyatakan banyaknya jabat tangan maksimal yang dapat dilakukan oleh n orang.

Misalkan siswa-siswa dalam sebuah kelas belum mengenal satu sama lain dan bermaksud berkenalan dan berjabat tangan satu sama lain. Mula-mula ke dalam kelas itu masuk seorang siswa. Tentu seorang siswa ini belum dapat berjabat tangan dengan siapapun. Oleh karena itu,

$$U_1 = 0$$

Selanjutnya ke dalam kelas itu masuk lagi seorang siswa kedua. Tentu siswa kedua ini berjabat tangan dengan siswa pertama tadi, dan hanya satu jabat tangan ini yang dapat terjadi.

$$U_2 = 1$$

Kini siswa ketiga masuk ke dalam kelas tersebut. Ia harus berjabat tangan dengan dua siswa sebelumnya, maka ada dua jabat tangan

tambahan yang terjadi. Oleh karena itu, total banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah

$$\boxed{U_3 = 1 + 2 = 3}$$

Demikian pula ketika siswa keempat masuk ke dalam kelas tersebut, ia harus berjabat tangan dengan tiga siswa sebelumnya, maka ada tiga jabat tangan tambahan yang terjadi. Oleh karena itu, total banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah

$$\boxed{U_4 = 3 + 3 = 6}$$

Selanjutnya kita perhatikan perumuman dari kasus ini. Misalkan sekarang dalam kelas itu sudah terdapat sebanyak n orang yang telah berjabat tangan satu sama lain. Banyaknya jabat tangan yang telah terjadi adalah U_n. Kini satu orang siswa lagi, yaitu siswa yang ke-(n + 1), masuk ke dalam kelas tersebut. Maka siswa ini harus berjabat tangan dengan semua siswa sebelumnya. Akibatnya, terjadi sebanyak n jabat tangan tambahan. Jadi, banyaknya jabat tangan yang dilakukan oleh (n + 1) siswa adalah

$$\boxed{U_{n+1} = U_n + n}$$

Inilah bentuk rekursif dari banyaknya cara (n + 1) orang berjabat tangan satu sama lain. Dari sini kita dapat mencari bentuk eksplisitnya dengan menggunakan teknik yang telah kita pelajari sebelumnya.

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + (n-1) \\ U_{n-1} &= U_{n-2} + (n-2) \\ U_{n-2} &= U_{n-3} + (n-3) \\ &\vdots \\ U_3 &= U_2 + 2 \\ U_2 &= U_1 + 1 \end{aligned}$$

Jumlah dari semua persamaan ini adalah

$$\begin{aligned} U_n &= U_1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\ &= 0 + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya cara n orang berjabat tangan satu sama lain adalah

$$U_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Soal

7.33 Dalam suatu pesta hadir tamu-tamu yang semuanya merupakan pasangan suami istri. Setiap tamu berjabat tangan dengan semua tamu lain kecuali dengan pasangannya sendiri. Tuliskan bentuk rekursif dari banyaknya jabat tangan maksimal yang dapat dilakukan oleh n pasang tamu, kemudian carilah bentuk eksplisitnya.

7.3.2 Masalah Menghitung Banyaknya Diagonal

Masalah menghitung banyaknya diagonal dalam suatu segi-n mirip dengan masalah jabat tangan. Ada beberapa cara pandang untuk menyelesaikan masalah ini.

1. Banyaknya diagonal yang dapat dibuat dalam suatu segi-n sama dengan banyaknya cara memilih 2 objek dari n objek yang tersedia tanpa memerhatikan urutan. Tetapi, dalam penghitungan ini sisi-sisi segi-n tersebut ikut terhitung, maka banyaknya diagonal-diagonal tersebut sama dengan banyaknya cara memilih 2 objek dari n objek dikurangi dengan banyak sisinya yaitu n.

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

2. Masing-masing titik sudut harus dihubungkan ke semua titik sudut yang lain, kecuali dua titik sudut yang berdekatan dengannya. Jadi, ada n titik sudut yang masing-masing harus dihubungkan ke $n - 3$ titik sudut yang lain, maka ada sebanyak $n \times (n - 3)$ diagonal. Tetapi dalam penghitungan ini setiap diagonal terhitung sebanyak dua kali, maka banyaknya diagonal yang sebenarnya adalah

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonal.

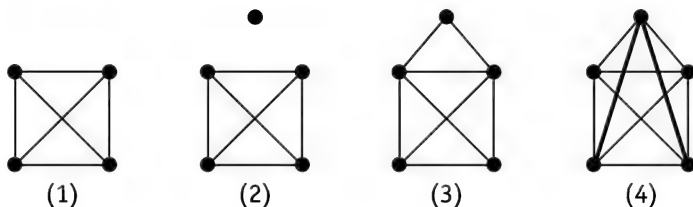
3. Cara pandang secara rekursif adalah sebagai berikut.

Misalkan U_n menyatakan banyaknya diagonal yang dapat dibuat pada sebuah segi-n. Untuk memperjelas ilustrasi berikut, di bawah diberikan gambar yang memperlihatkan ilustrasi ini untuk $n = 4$.

Misalkan kita mempunyai sebuah bangun segi-n. Banyaknya diagonal yang ada adalah U_n (1). Kini kita buat satu titik di luar bangun segi-n tersebut (2). Untuk menjadikan segi-n tersebut sebagai segi-($n + 1$), maka kita harus menghubungkan dua titik sudut segi-n ini dengan titik yang baru. Akibatnya, terbentuk dua garis baru yang merupakan sisi dari segi-($n + 1$) yang terjadi. Sekarang banyaknya diagonal yang ada sama dengan banyaknya diagonal semula, yaitu U_n, ditambahkan dengan satu, yaitu garis yang awalnya menghubungkan kedua titik yang sekarang kita hubungkan dengan titik baru tadi (3). Selanjutnya, untuk membentuk diagonal-diagonal yang lain, kita harus menghubungkan titik baru ini dengan titik-titik lain yang tidak berdekatan dengannya, yaitu sebanyak $n - 2$ titik (4). Jadi, banyaknya diagonal yang dapat dibuat dalam sebuah segi-($n + 1$) adalah

$$U_{n+1} = U_n + 1 + (n - 2)$$

atau

$$U_{n+1} = U_n + (n - 1)$$

Kita telah menemukan bentuk rekursif dari banyaknya diagonal yang dapat dibuat dalam sebuah segi-($n + 1$). Tetapi perhatikan bahwa rumus rekursif ini hanya berlaku untuk $n \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} + (n-2) \\
U_{n-1} &= U_{n-2} + (n-3) \\
U_{n-2} &= U_{n-3} + (n-4) \\
&\vdots \\
U_5 &= U_4 + 3 \\
U_4 &= U_3 + 2
\end{aligned}
$$

Jumlah dari semua persamaan ini adalah

$$
\begin{aligned}
U_n &= U_3 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) \\
&= 0 + (1+1) + (1+2) + \ldots (1 + n - 3) \\
&= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-3} + 1 + 2 + \ldots + (n-3) \\
&= (n-3) \times 1 + \frac{1}{2}(n-3)(n-2) \\
&= \frac{1}{2}n(n-3)
\end{aligned}
$$

Jadi, diagonal yang dapat dibuat dalam sebuah segi-n adalah

$$\boxed{U_n = \frac{1}{2}n(n-3)}$$

7.3.3 Masalah-masalah dalam Geometri

Beberapa masalah dalam geometri lebih mudah dipandang secara rekursif. Perhatikanlah beberapa contoh yang saling berkaitan berikut.

Contoh 7.3.3.1

Jika seutas tali dipotong n kali, berapa banyaknya potongan tali maksimal yang bisa diperoleh?

Jawab

Kita awali dengan mengumpulkan data.

n	1	2	3	4	...	n
	——•——	—•—•—	-•-•-•-	-••••-		
T_n	2	3	4	5	...	....

Dari pola di atas terlihat bahwa jika seutas tali dipotong n kali maka terjadi sebanyak $n + 1$ potongan. Pola penalarannya adalah sebagai berikut.

Kita pandang tali tersebut sebagai garis dan potongan-potongan kita sebagai titik. Setiap titik akan membagi suatu segmen garis menjadi dua bagian. Jadi, setiap kali kita menambahkan satu titik pada garis tersebut, banyaknya segmen garis yang ada bertambah satu.

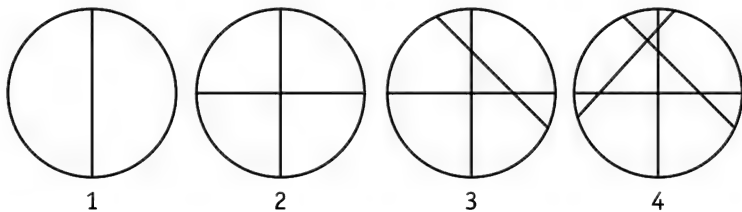
$$\begin{aligned}
T_2 &= T_1 + 1 \\
T_3 &= T_2 + 1 \\
T_4 &= T_3 + 1 \\
&\vdots \\
T_n &= T_{n-1} + 1 \quad + \\
\hline
T_n &= T_1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1} \\
&= 2 + (n-1) \times 1 \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

Jadi, jika seutas tali dipotong n kali, banyaknya potongan tali maksimal yang bisa diperoleh adalah $n + 1$ potongan.

Contoh 7.3.3.2

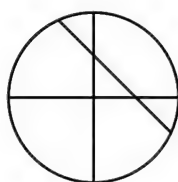
Jika sebuah pizza dipotong n kali, berapa banyaknya potongan pizza maksimal yang bisa diperoleh?

Jawab

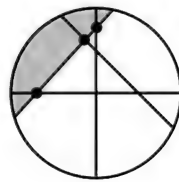
Kita awali dengan mengumpulkan data.

Data:

n	1	2	3	4	...	n
P_n	2	4	7	11	...	....

Kita dapat menarik kesimpulan berkaitan dengan cara memotong pizza tersebut agar diperoleh banyaknya potongan yang maksimal.

Kita pandang pizza sebagai bidang dan potongan yang kita buat sebagai garis. Banyaknya garis sebelumnya adalah sebanyak (n – 1) garis (1). Agar diperoleh banyaknya potongan yang maksimal, setiap garis ke-n harus memotong semua garis sebelumnya. Maka terdapat (n – 1) titik potong (2). Menurut contoh sebelumnya, yaitu 7.3.3.1, jika sebuah garis dipotong n kali akan menghasilkan (n + 1) bagian. Artinya, jika sebuah garis dipotong (n – 1) kali akan menghasilkan n bagian, di mana setiap bagian membentuk suatu daerah baru (3). Jadi, banyaknya tambahan daerah untuk setiap pemotongan adalah n. Gambar berikut mengilustrasikan proses berpikir ini untuk n = 4.

(1)

(2)

(3)

Maka kita memperoleh

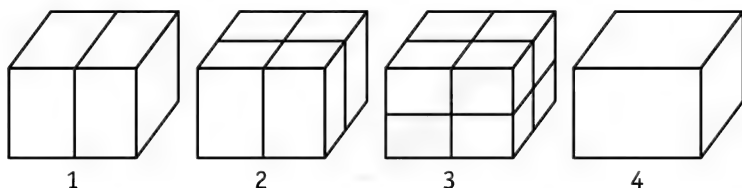
$$
\begin{aligned}
P_2 &= P_1 + 2 \\
P_3 &= P_2 + 3 \\
P_4 &= P_3 + 4 \\
&\vdots \\
P_n &= P_{n-1} + n \\
\hline
P_n &= P_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\
&= 2 + (1+1) + (1+2) + \ldots (1 + n - 1) \\
&= 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1} + 1 + 2 + \ldots + (n-1) \\
&= 2 + (n-1) \times 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \\
&= 2 + n - 1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1
\end{aligned}
$$

Jadi, jika sebuah pizza dipotong n kali, banyaknya potongan pizza maksimal yang bisa diperoleh adalah sebanyak $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$ potongan.

Contoh 7.3.3.3

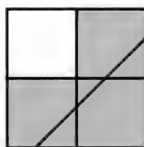
Jika sebuah kue dipotong n kali, berapa banyaknya potongan kue maksimal yang bisa diperoleh?

Jawab

Kita telah berhasil menyelesaikan masalah-masalah pemotongan tali (dimensi satu) dan pizza (dimensi dua/bidang). Dengan berbekal hal-hal yang telah kita pelajari di sana, kini kita akan mencoba menyelesaikan masalah yang serupa pada kue (dimensi tiga/ruang).
Awali dengan mengumpulkan data.

Data:

n	1	2	3	4	...	n
K_n	2	4	8	?	...	....

Tampak bahwa mulai data ke-4 sulit untuk diperoleh.
Dugaan kita, mungkin bilangan keempat yang merupakan kelanjutan pola 2, 4, 8 adalah 16. Namun marilah kita perhatikan lebih lanjut.
Pada potongan pertama, kita membagi kue ini menjadi dua bagian. Pada potongan kedua, kita membagi setiap potongan sebelumnya masing-masing menjadi dua bagian lagi, sehingga diperoleh 4 potongan kue. Pada potongan ketiga, kita juga membagi setiap potongan sebelumnya menjadi dua bagian lagi, sehingga diperoleh 8 potongan kue. Oleh karena itu, agar pada potongan keempat diperoleh 16 potongan kue, kita harus dapat membuat suatu potongan yang membagi kedelapan potongan kue tersebut masing-masing menjadi dua bagian. Dapatkah kita melakukan hal ini?

Marilah kita belajar dari suatu hal yang lebih sederhana, yakni dalam dimensi dua. Kita perhatikan kembali contoh 4.1.1, di mana kita menemukan bahwa dalam persegi berpetak 2×2, tidak mungkin membuat sebuah garis yang melalui keempat petak tersebut. Pasti terdapat salah satu petak yang tidak dilalui oleh garis ini.

Kini marilah kita kembali ke permasalahan di atas. Dengan memerhatikan hal ini, kita dapat berpikir pula bahwa dalam potongan kue keempat pasti akan ada satu bagian yang tidak terbagi menjadi dua. Akibatnya, kita hanya memperoleh 15 potongan.

Bagaimana menjelaskan hal ini? Marilah kita mencoba menelusuri logikanya. Kita pandang kue sebagai ruang dan potongan kue sebagai bidang. Supaya banyaknya ruang yang diperoleh menjadi maksimal, maka setiap bidang ke-n harus memotong semua bidang yang sebelumnya. Masing-masing perpotongan dengan bidang sebelumnya itu pasti membentuk satu garis potong.

Dari contoh 7.3.3.2, kita telah mengetahui bahwa jika sebuah bidang dipotong oleh n garis potong, maka diperoleh maksimal $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ subbidang, di mana setiap subbidang tersebut akan memotong suatu subruang menjadi dua, sehingga banyaknya subruang (yaitu potongan kue) bertambah satu.

Contohnya adalah sebagai berikut.

1. Saat dipotong pertama kali, diperoleh 2 daerah/potongan kue.
2. Saat dipotong kedua kali:

   Supaya maksimal maka bidang kedua harus memotong bidang pertama, maka muncul 1 garis potong, maka ada sebanyak $\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) + 1 = 2$ daerah tambahan.

   Jadi, diperoleh $2 + 2 = 4$ potongan kue.

3. Saat dipotong ketiga kali:

   Supaya maksimal maka bidang ketiga harus memotong bidang pertama dan kedua, maka muncul 2 garis potong, maka ada sebanyak $\frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) + 1 = 4$ daerah tambahan.

   Jadi, diperoleh 4 + 4 = 8 potongan kue.

4. Saat dipotong keempat kali:

   Supaya maksimal maka bidang keempat harus memotong bidang pertama, kedua, dan ketiga, maka muncul 3 garis potong, maka ada sebanyak $\frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) + 1 = 7$ daerah tambahan.

   Jadi, diperoleh 8 + 7 = 15 potongan kue.

dan seterusnya.

Dengan kata lain,

1. $n = 1 \Rightarrow K_n = 2$
2. $n = 2 \Rightarrow K_n = 2 +$ banyaknya daerah yang didapat dari 1 garis potong

   $= 2 + \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) + 1$

   $= 4$
3. $n = 3 \Rightarrow K_n = 4 +$ banyaknya daerah yang didapat dari 2 garis potong

   $= 4 + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) + 1$

   $= 8$
4. $n = 3 \Rightarrow K_n = 8 +$ banyaknya daerah yang didapat dari 3 garis potong

   $= 8 + \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) + 1$

   $= 15$

Sehingga kita peroleh bahwa

$K_n = K_{n-1} +$ banyaknya daerah yang didapat dari $(n - 1)$ garis potong

$$\Leftrightarrow K_n = K_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + 1$$

Maka kita memperoleh

$$K_2 = K_1 + \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) + 1$$

$$K_3 = K_2 + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) + 1$$

$$K_4 = K_3 + \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) + 1$$

$$\vdots$$

$$K_n = K_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + 1$$

~~$K_n = K_1 + \frac{1}{2}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right] + \frac{1}{2}\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right]$~~ $+$

$$+ \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1}$$

Dengan memerhatikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

dan $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, kita memperoleh

$$K_n = K_1 + \frac{1}{2}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right] + \frac{1}{2}\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right]$$

$$+ \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n}$$

$$= K_1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \times 1$$

Karena $K_1 = 2$, maka

$$= 2 + \frac{1}{12}(2n^3 - 3n^2 + n) + \frac{1}{4}(n^2 - n) + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}n + n - 1$$

$$= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

Jadi, jika sebuah kue dipotong n kali, banyaknya potongan kue maksimal yang bisa diperoleh adalah sebanyak $\frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$ potongan.

Soal

Selesaikan setiap masalah berikut seperti contoh 7.3.3.1, 7.3.3.2, dan 7.3.3.3. Untuk soal 7.34, 7.35, dan 7.36, anggaplah $n \geq 2$.

7.34 Berapa banyaknya busur maksimal yang dapat diperoleh jika terdapat n titik pada sebuah lingkaran?

7.35 Buktikan bahwa banyaknya daerah maksimal yang dapat diperoleh dengan memotongkan n lingkaran adalah

$$n^2 - n + 2$$

7.36 Buktikan bahwa banyaknya ruang maksimal yang dapat diperoleh dengan memotongkan n bola adalah

$$\frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{8}{3}n$$

7.37 Pada sebuah lingkaran dipilih sebanyak n titik dan dibuat garis-garis yang menghubungkan setiap pasang titik-titik tersebut dengan asumsi bahwa tidak ada tiga garis yang berpotongan pada satu titik di dalam lingkaran. Misalkan Q_n menyatakan banyaknya daerah yang terbentuk di dalam lingkaran.

a. Tunjukkan bahwa $Q_n = 2^{n-1}$ untuk n = 1, 2, 3, 4, 5.

b. Perlihatkan bahwa $Q_6 = 31$.

c. Buktikan bahwa rumus yang sebenarnya adalah

$$Q_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1$$

Petunjuk : Rumus ini juga dapat dibuktikan tanpa menggunakan relasi rekurensi, yaitu dengan terlebih dahulu memperlihatkan bahwa

$$Q_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

7.3.4 Menara Hanoi

Masalah yang berikutnya merupakan suatu teka-teki yang kini dikenal dengan nama *Menara Hanoi*. Teka-teki ini ditemukan oleh Edouard

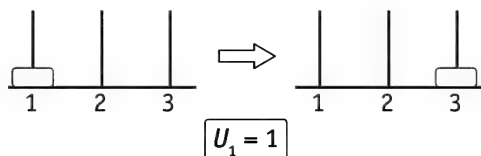
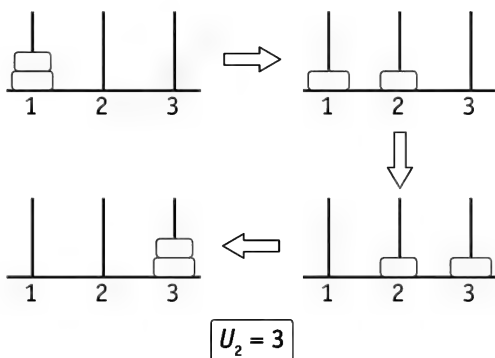
Lucas, seorang matematikawan asal Perancis sekitar tahun 1880. Teka-teki ini muncul dengan sebuah legenda kuno yang kurang lebih berbunyi sebagai berikut.

Dalam sebuah kuil di Benares, India, di bawah kubah yang dianggap sebagai pusat dunia, terdapat sebuah plat kuningan di mana berdiri tiga jarum berlian besar yang masing-masing satu hasta tingginya. Pada salah satu dari tiga jarum tersebut, Allah menempatkan enam puluh empat piringan emas, piringan yang terbesar terletak di paling bawah dan piringan-piringan di atasnya berukuran lebih kecil dari yang di bawah, hingga yang teratas merupakan piringan terkecil. Sepanjang hari, orang-orang suci memindahkan piringan-piringan tersebut dari satu jarum ke jarum yang lain menurut aturan tetap Brahma, di mana orang tidak dapat memindahkan lebih dari satu piringan secara bersamaan dan ia harus meletakkan suatu piringan dalam suatu jarum sehingga tidak ada piringan yang lebih kecil di bawahnya. Diceritakan bahwa ketika keenam puluh empat piringan ini telah berhasil dipindahkan dari jarum semula ke suatu jarum yang lain menurut aturan tersebut, menara, kuil, dan semua bangunan yang ada akan hancur menjadi debu dan dunia akan berakhir.

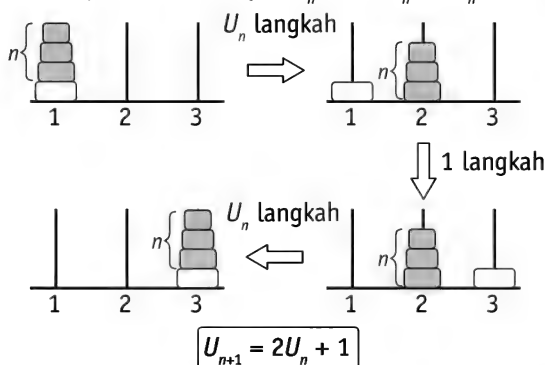
Hal ini berkembang menjadi suatu teka-teki matematika dan mudah untuk diperagakan. Kita dapat menyiapkan tiga buah tongkat yang telah dilekatkan pada sebuah bidang dan beberapa cakram (piringan) dengan ukuran berbeda yang diberi lubang sehingga bagian tengahnya dapat masuk ke dalam tongkat tersebut.

Tugas kita adalah memindahkan piringan-piringan tersebut dari tongkat pertama ke tongkat ketiga, dengan memakai tongkat kedua sebagai tampungan sementara. Namun, dalam pemindahan tersebut, tidak boleh ada piringan yang terletak di atas piringan yang lebih kecil.

Misalkan U_n menyatakan banyaknya langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki ini jika terdapat sebanyak n piringan yang harus dipindahkan.

Jika hanya terdapat satu piringan, tentu hanya diperlukan satu langkah untuk menyelesaikannya, yaitu dengan langsung memindahkan piringan ini dari tongkat pertama ke tongkat ketiga.

Jika terdapat dua piringan, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut. Kita sebut kedua piringan ini piringan besar dan piringan kecil. Mula-mula kita memindahkan piringan kecil dari tongkat pertama ke tongkat kedua. Kemudian kita memindahkan piringan besar dari tongkat pertama ke tongkat ketiga. Terakhir kita memindahkan piringan kecil dari tongkat kedua ke tongkat ketiga. Jadi, diperlukan tiga langkah untuk menyelesaikannya.

Cara menyelesaikan masalah ini untuk dua piringan menjadi dasar untuk menentukan cara menyelesaikan masalah ini jika terdapat lebih dari dua piringan.

Kini misalkan kita telah mengetahui bahwa untuk menyelesaikan masalah ini jika terdapat n piringan adalah U_n, dan kita akan menyelesaikan jika terdapat $(n + 1)$ piringan. Cara menyelesaikannya adalah sebagai berikut. Mula-mula kita pindahkan n piringan dari tongkat

pertama ke tongkat kedua. Di sini tongkat ketigalah yang digunakan sebagai tampungan sementara. Namun banyaknya langkah yang diperlukan tetap sama, yaitu U_n langkah. Kemudian kita pindahkan piringan terbesar ke tongkat ketiga. Terakhir, kita pindahkan n piringan tersebut dari tongkat kedua ke tongkat ketiga, dengan tongkat pertama sebagai tampungan sementara. Banyaknya langkah yang diperlukan adalah U_n langkah. Jadi, diperlukan sebanyak $U_n + 1 + U_n = 2U_n + 1$ langkah.

$$\boxed{U_{n+1} = 2U_n + 1}$$

Inilah bentuk rekursif dari banyaknya langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki menara Hanoi jika terdapat $(n + 1)$ piringan. Kini kita akan mencari bentuk eksplisitnya.

$$\begin{array}{rcl|c|rcl}
U_n &=& 2U_{n-1}+1 & \times 1 & U_n &=& 2U_{n-1}+1 \\
U_{n-1} &=& 2U_{n-2}+1 & \times 2 & 2U_{n-1} &=& 2^2U_{n-2}+2 \\
U_{n-2} &=& 2U_{n-3}+1 & \times 2^2 & 2^2U_{n-2} &=& 2^3U_{n-3}+2^2 \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
U_3 &=& 2U_2+1 & \times 2^{n-3} & 2^{n-3}U_3 &=& 2^{n-2}U_2+2^{n-3} \\
U_2 &=& 2U_1+1 & \times 2^{n-2} & 2^{n-2}U_2 &=& 2^{n-1}U_1+2^{n-2} \\
\hline
 & & & & U_n &=& 2^{n-1}U_1+\left(1+2+\ldots+2^{n-2}\right) \quad +
\end{array}$$

Untuk menentukan jumlah dari $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}$, kita misalkan

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}$$

Kita kalikan kedua ruas dengan 2, diperoleh

$$2S = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

Kurangkan dan kita memperoleh

$$-S = 1 - 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = 2^{n-1} - 1$$

Jadi, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} U_n &= 2^{n-1}U_1 + (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{n-1}(1) + (2^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan teka-teki menara Hanoi jika terdapat n piringan adalah

$$\boxed{U_n = 2^n - 1}$$

Jika legenda di atas benar dan orang dapat memindahkan satu cakram dalam waktu satu detik, maka dunia akan berakhir dalam waktu $2^{64} - 1$ detik, atau sekitar 584.582 milyar tahun.

7.3.5 Masalah Pengubinan

Dalam pembahasan tentang paritas dalam bab ketiga, kita pernah membahas masalah pengubinan yang berkaitan dengan paritas, yakni bagaimana papan catur diberi "ubin" berupa domino-domino.

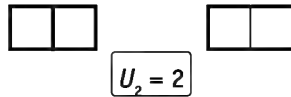
Kini akan dibahas sisi lain mengenai pengubinan yang berkaitan dengan rumus rekursif, yakni banyaknya cara kita melakukan pengubinan tersebut. Rumus rekursif yang akan muncul dalam pembahasan ini berorde dua.

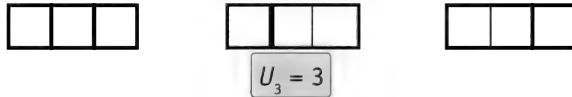
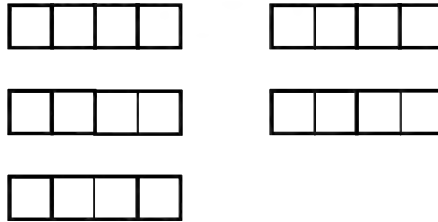
Misalnya kita akan menghitung banyaknya cara sebuah persegi panjang berpetak berukuran $n \times 1$ ditutup dengan ubin-ubin berukuran 1×2 dan/atau 1×1. Misalkan U_n menyatakan banyaknya cara menutup persegi panjang $n \times 1$ tersebut. Kita awali dengan mengumpulkan data.

Untuk $n = 1$, tentu hanya ada 1 cara, yaitu dengan menggunakan sebuah ubin 1×1.

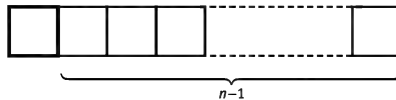
$$\boxed{U_1 = 1}$$

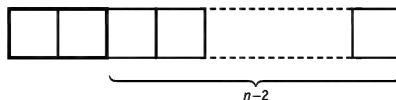
Untuk $n = 2$ ada 2 cara, yaitu menggunakan dua ubin 1×1 atau satu ubin 1×2.

$U_2 = 2$

Untuk $n = 3$ ada 3 cara, yaitu sebagai berikut.

$U_3 = 3$

Untuk $n = 4$ ada 5 cara, yaitu sebagai berikut.

Kita perhatikan bahwa untuk menutup petak-petak 4×1 ini, kita dapat melakukannya dengan cara berikut. Pertama, meletakkan sebuah ubin 1×1 sebagai ubin pertama, kemudian menutup petak-petak yang tersisa dengan banyak cara yang sama dengan U_3. Kedua, meletakkan sebuah ubin 1×2 sebagai ubin pertama, kemudian menutup petak-petak yang tersisa dengan banyak cara yang sama dengan U_2. Oleh karena itu kita dapat menuliskan

$$U_4 = U_3 + U_2 = 3 + 2 = 5$$

Secara umum, kita dapat memperlihatkan bahwa untuk menutup petak-petak $n \times 1$, kita dapat melakukan dengan dua cara. Pertama, meletakkan sebuah ubin 1×1 sebagai ubin pertama.

Selanjutnya ada U_{n-1} cara untuk menutup petak-petak sisanya.

Kedua, meletakkan sebuah ubin 1×2 sebagai ubin pertama.

Selanjutnya ada U_{n-2} cara untuk menutup petak-petak sisanya.

Jadi, kita dapat menuliskan

$$\boxed{U_n = U_{n-1} + U_{n-2}}$$

Artinya, banyaknya cara pengubinan ini membentuk suatu barisan yang setiap sukunya merupakan jumlah dari dua suku sebelumnya, dan diawali dengan suku pertama 1 dan suku kedua 2. Kita dapat mencari bentuk eksplisitnya dengan cara serupa dengan yang pernah kita lakukan sebelumnya.

Dengan cara tersebut kita akan memperoleh

$$U_n = P_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + P_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dengan nilai $U_1 = 1$ dan $U_2 = 2$ diperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)P_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)P_2 = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 P_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 P_2 = 2 \end{cases}$$

yang memiliki solusi

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \text{ dan } P_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}$$

Jadi, bentuk eksplisit dari banyaknya cara menutup sebuah persegi panjang berpetak berukuran $n \times 1$ dengan ubin-ubin berukuran 1×1 dan/atau 1×2 adalah

$$\boxed{U_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Soal

7.38 Tentukanlah banyaknya cara sebuah persegi panjang berpetak berukuran $n \times 2$ ditutup dengan ubin-ubin berukuran 1×2.

7.39 Misalkan ubin berukuran 1×1 berwarna abu-abu dan ubin berukuran 1×2 diberi warna dengan dua cara, yaitu putih-hitam dan hitam-putih. Artinya, ada dua macam ubin 1×2 yang berbeda.

a. Dengan menggunakan ubin-ubin berwarna ini, tentukan banyaknya cara pengubinan berbeda untuk sebuah persegi panjang berpetak berukuran 17×1.

b. Dengan menggunakan ubin-ubin berwarna ini, tentukan rumus eksplisit dalam n untuk banyaknya cara pengubinan berbeda dari persegi panjang berpetak berukuran $n \times 1$.

7.40 Misalkan U_n menyatakan banyaknya cara sebuah persegi panjang berpetak berukuran $n \times 1$ ditutup dengan ubin-ubin berukuran 1×1 atau 1×2, jika terdapat dua macam ubin 1×1 yang berbeda warna dan tiga macam ubin 1×2 yang berbeda warna.

a. Perlihatkan bahwa $U_1 = 2$ dan $U_2 = 7$.

b. Perlihatkan bahwa

$$U_n = 2U_{n-1} + 3U_{n-2}$$

c. Perlihatkan bahwa

$$U_n = \frac{5}{6}.3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$$

7.3.6 Masalah Josephus

Nama masalah ini berasal dari Flavius Josephus, seorang sejarawan Yahudi pada abad ke-1. Ketika terjadi peperangan, Josephus bersama 40 tentara lainnya terperangkap dalam sebuah gua oleh tentara-tentara Romawi. Singkat cerita, mereka berencana untuk bunuh diri dengan cara sebagai berikut. Mereka berempatpuluhsatu berdiri membentuk sebuah lingkaran, mulai orang ke-1, 2, 3, dan seterusnya hingga orang ke-41. Urutan bunuh diri dimulai dari orang ke-3, 6, 9, 12, dan seterusnya, melingkar sampai dengan tersisa dua orang terakhir. Namun, Josephus dan seorang temannya diam-diam tidak setuju dengan rencana konyol ini dan ia mulai menghitung, ia harus menjadi orang keberapa agar ia dan temannya itu tidak mendapat giliran bunuh diri.

Kita dapat mencoba hal ini di kertas, dengan menuliskan bilangan-bilangan 1, 2, 3, dan seterusnya hingga 41 secara melingkar, kemudian mulai dari 1, kita mencoret bilangan ketiga berikutnya. Proses pencoretan ini kita lanjutkan hingga hanya tersisa 2 bilangan terakhir yang tidak tercoret. Setelah melakukan proses ini, dapat kita lihat bahwa bilangan yang tidak tercoret adalah bilangan 16 dan 31.

Mungkin bagi orang pada masa itu, proses seperti ini dianggap sebagai semacam undian, namun pada kenyataannya tidaklah demikian. Jika kita memulai proses ini dengan sejumlah orang tertentu, maka nomor urutan orang-orang yang selamat dapat kita tentukan dengan pasti.

Kita akan membahas masalah Josephus jika terdapat n orang yang berdiri membentuk lingkaran dan mulai dari 2, setiap orang kedua bunuh diri. Sebagai contoh, jika terdapat 10 orang, maka urutan giliran bunuh diri adalah 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, sehingga orang yang selamat adalah orang pada urutan ke-5.

Kita dapat terlebih dahulu meluangkan waktu untuk mengumpulkan data untuk masalah ini, dan kita akan memperoleh data sebagai berikut.

n	Data
1	**1**
2	**1** ~~2~~
3	~~1~~ ~~2~~ **3**
4	**1** ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~
5	~~1~~ ~~2~~ **3** ~~4~~ ~~5~~
6	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ **5** ~~6~~
7	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ **7**
8	**1** ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~
9	~~1~~ ~~2~~ **3** ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~
10	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ **5** ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~
11	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ **7** ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~
12	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ **9** ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~
13	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ **11** ~~12~~ ~~13~~
14	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ **13** ~~14~~
15	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ **15**
16	**1** ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~
17	~~1~~ ~~2~~ **3** ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~

dan seterusnya.

Dari data di atas kita melihat suatu pola yang menarik, yaitu mulai dari $n = 2$, nomor orang yang selamat adalah 1, 1, 3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, dan kita dapat menerka pola selanjutnya yaitu 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, dan seterusnya.

Dari sini dapat kita perhatikan bahwa jika n merupakan bilangan dua berpangkat, misalkan $n = 2^p$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif p, maka orang yang selamat adalah orang yang bernomor 1.

Lebih lanjut, jika n adalah m lebihnya dari bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari n, yaitu $n = 2^p + m$, maka dapat kita lihat bahwa orang yang selamat adalah orang yang bernomor $2m + 1$.

Berdasarkan pola ini kita dapat menghitung nomor orang yang selamat jika kita mulai dengan 2011 orang, misalnya. Bilangan dua berpangkat yang terbesar yang kurang dari 2011 adalah 1024. Oleh sebab itu, 2011 kita tuliskan sebagai

$$2011 = 2^{10} + 987$$

Jadi, orang yang selamat adalah orang yang bernomor

$$2 \times 987 + 1 = 1975$$

Pola di atas hanyalah pola yang merupakan terkaan kita berdasarkan data yang telah kita kumpulkan. Kini kita akan memandang masalah ini secara rekursif.

Misalkan U_n menyatakan nomor urut orang terakhir yang selamat jika kita mulai dengan n orang. Kita dapat membagi menjadi dua kasus, yaitu ketika n genap dan ketika n ganjil.

Ketika n genap, misalkan $n = 2k$, maka nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k}. Pada putaran pertama, semua orang bernomor genap bunuh diri, sehingga orang-orang yang selamat adalah orang-orang bernomor

$$1, 3, 5, \ldots, 2k - 1$$

Barisan ini bisa ditulis

$$2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \ldots, 2 \times k - 1$$

Ini berarti ada sebanyak k orang yang selamat. Untuk putaran kedua, terjadi pergeseran urutan sebagai berikut. Urutan pertama kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-1, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-3, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-5, dan seterusnya sampai dengan urutan ke-k kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-$(2k - 1)$.

Pada putaran kedua, kita melakukan lagi proses pergiliran bunuh diri tersebut, tetapi kali ini dengan k orang yang tersisa. Orang terakhir yang selamat bernomor urut U_k, yaitu orang yang tadinya pada putaran pertama menduduki urutan ke-$(2U_k - 1)$. Karena pada putaran pertama kita telah memisalkan nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k}, maka kita memperoleh hubungan rekursif

$$U_{2k} = 2U_k - 1$$

Kini kita perhatikan kasus ketika n ganjil, misalkan $n = 2k + 1$, maka nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k+1}. Pada putaran pertama, semua orang bernomor genap bunuh diri. Setelah orang bernomor genap terakhir bunuh diri, tentu diikuti dengan orang ke-1 bunuh diri. Jadi, orang-orang yang selamat adalah orang-orang bernomor

$$3, 5, 7, \ldots, 2k + 1$$

Barisan ini bisa ditulis

$$2 \times 1 + 1, 2 \times 2 + 1, 2 \times 3 + 1, \ldots, 2 \times k + 1$$

Ini berarti ada sebanyak k orang yang selamat. Untuk putaran kedua, terjadi pergeseran urutan sebagai berikut. Urutan pertama kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-3, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-5, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-7, dan seterusnya sampai dengan urutan ke-k kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke-$(2k + 1)$.

Pada putaran kedua, kita melakukan lagi proses pergiliran bunuh diri tersebut, tetapi kali ini dengan k orang yang tersisa. Orang terakhir yang selamat bernomor urut U_k, yaitu orang yang tadinya pada putaran

pertama menduduki urutan ke-($2U_k + 1$). Karena pada putaran pertama kita telah memisalkan nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k+1}, maka kita memperoleh hubungan rekursif

$$U_{2k+1} = 2U_k + 1$$

Jadi, sejauh ini kita telah memperoleh dua rumus rekursif, yaitu

$$U_{2k} = 2U_k - 1$$
$$U_{2k+1} = 2U_k + 1$$

Relasi rekurensi ini dapat kita gunakan untuk membuktikan dugaan dari pola yang tadi telah kita peroleh, yaitu jika $n = 2^p + m$, dengan $0 \le m < 2^p$, maka orang yang selamat adalah orang bernomor $2m + 1$. Kita akan membuktikan pernyataan ini dengan induksi pada p. Akan dibuktikan bahwa $U_{2^p+m} = 2m+1$ untuk $p \ge 0$ dan $0 \le m < 2^p$.

Untuk $p = 0$, maka kita memperoleh

$$0 \le m < 1$$

sehingga nilai m yang memenuhi hanyalah $m = 0$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} U_{2^p+m} &= U_{2^0+0} \\ &= U_1 \end{aligned}$$

dan tadi telah kita peroleh dari data yang kita kumpulkan bahwa $U_1 = 1$, yang nilainya sama dengan $2 \times 0 + 1$. Jadi, pernyataan ini benar untuk $p = 0$.

Selanjutnya kita misalkan untuk $p = k$ berlaku

$$U_{2^k+m} = 2m+1$$

dan akan kita buktikan bahwa untuk $p = k + 1$ berlaku

$$U_{2^{k+1}+m} = 2m+1$$

Untuk membuktikan hal ini, kita bagi menjadi dua kasus.

1. Kasus pertama, jika m genap, maka dapat kita tuliskan $m = 2a$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif a, dengan

   $$0 \le a < 2^{k-1}$$

   Maka kita memperoleh

   $$\begin{aligned} U_{2^{k+1}+m} &= U_{2\times 2^k+2a} \\ &= U_{2(2^k+a)} \end{aligned}$$

$$= 2U_{2^k+a} - 1 \qquad \text{(dari rumus rekursif)}$$
$$= 2(2a + 1) - 1 \qquad \text{(dari hipotesis induksi)}$$
$$= 2(m + 1) - 1$$
$$= 2m + 1$$

Jadi, untuk m genap telah terbukti bahwa

$$U_{2^{k+1}+m} = 2m + 1$$

2. Kasus kedua, jika m ganjil, maka dapat kita tuliskan $m = 2a + 1$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif a, dengan

$$0 \le a < 2^{k-1} - \frac{1}{2}$$

Maka kita memperoleh

$$U_{2^{k+1}+m} = U_{2\times 2^k+2a+1}$$
$$= U_{2(2^k+a)+1}$$
$$= 2U_{2^k+a} + 1 \qquad \text{(dari rumus rekursif)}$$
$$= 2(2a + 1) + 1 \qquad \text{(dari hipotesis induksi)}$$
$$= 2m + 1$$

Jadi, untuk m ganjil telah terbukti bahwa

$$U_{2^{k+1}+m} = 2m + 1$$

Jadi, untuk m genap maupun ganjil telah terbukti bahwa pernyataan ini benar untuk $p = k + 1$. Hal ini menuntaskan pembuktian.

> Misalkan U_n menyatakan nomor urut orang yang selamat pada masalah Josephus yang dimulai dengan n orang dan setiap orang kedua bunuh diri. Jika $n = 2^p + m$ dengan $p \ge 0$ dan $0 \le m < 2^p$, maka $U_n = 2m + 1$.

Sekarang permasalahannya, apakah rumus di atas dapat dinyatakan dalam variabel n saja? Jawabannya adalah dapat, yaitu dengan rumus

$$\boxed{U_n = 1 + 2n - 2^{1+\lfloor {}^2\log n \rfloor}}$$

dengan $\lfloor \ldots \rfloor$ merupakan fungsi *floor*. Kita pernah memakai fungsi ini sebelumnya pada masalah menghitung banyaknya angka nol pada hasil faktorial, yaitu untuk membulatkan ke bawah.

Rumus di atas diperoleh dengan proses berpikir sebagai berikut. Untuk mencari nomor urut orang yang selamat pada masalah Josephus yang dimulai dengan n orang dan setiap orang kedua bunuh diri, mula-mula kita mencari bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan n. Misalkan bilangan dua berpangkat terbesar ini adalah 2^p, sehingga $n = 2^p + m$, atau $m = n - 2^p$. Maka nomor urut orang yang selamat adalah

$$U_n = 2m + 1 = 2(n - 2^p) + 1 = 1 + 2n - 2^{1+p} \quad (1)$$

Sekarang misalkan kita akan menghitung nomor urut orang yang selamat jika kita mulai dengan 100 orang. Bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan 100 adalah $64 = 2^6$. Kita dapat menulis bahwa $6 = {}^2\log 64$. Jika kita mengganti 64 dengan 100, tentu nilai logaritma tersebut bertambah besar, tetapi tidak akan mencapai 7, sebab $7 = {}^2\log 128$. Jadi, dalam logaritma tadi, kita dapat mengganti 64 dengan 100 dengan bantuan fungsi *floor*, yaitu pembulatan ke bawah, sehingga diperoleh

$$6 = \left\lfloor {}^2\log 100 \right\rfloor$$

Penjelasan serupa berlaku jika 100 diganti dengan sebarang bilangan asli n. Misalkan bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan n adalah $N = 2^p$. Kita dapat menulis bahwa $p = {}^2\log N$. Jika kita mengganti N dengan n, tentu nilai logaritma tersebut bertambah besar, tetapi tidak akan mencapai satu lebihnya dari p. Jadi, dengan bantuan fungsi *floor* diperoleh

$$p = \left\lfloor {}^2\log n \right\rfloor$$

Ini berarti persamaan (1) dapat kita tulis sebagai

$$U_n = 1 + 2n - 2^{1+\left\lfloor {}^2\log n \right\rfloor}$$

sebagaimana yang diinginkan. Para pembaca dapat menguji kebenaran rumus ini untuk beberapa nilai n yang dapat dihitung dengan mudah.

7.3.7 Beberapa Masalah Lain

Berikut ini akan diberikan beberapa soal berupa masalah-masalah lain yang berkaitan dengan rumus rekursif.

Soal

7.41 Perhatikanlah pola berikut.

$$
\begin{array}{c}
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
2 & 2 & 2 \\
2 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4
\end{array}
$$

(1) (2) (3) (4)

Tentukanlah rumus rekursif dan eksplisit untuk:

a. d_n, yaitu jumlah semua bilangan pada salah satu diagonal dalam pola ke-n.

b. s_n, yaitu jumlah semua bilangan yang ada pada pola ke-n.

7.42 Kita akan menentukan banyaknya persegi berbeda yang ada pada sebuah papan catur $n \times n$.

a. Berapa banyaknya persegi berbeda yang ada pada papan catur berukuran 1×1, 2×2, 3×3, dan 4×4?

b. Temukan bentuk rekursif dari banyaknya persegi berbeda yang ada pada papan catur berukuran $n \times n$.

c. Dari bentuk rekursif tersebut, carilah bentuk eksplisitnya.

7.43 Di suatu tempat digunakan sistem kode rahasia yang hanya tersusun atas huruf A dan B. Berapa banyak kode rahasia dengan panjang n yang tidak memuat dua huruf A berurutan?

Petunjuk : Misalkan ada sebanyak U_n. Ada sebanyak U_{n-1} yang huruf pertamanya B, dan ada sebanyak U_{n-2} yang huruf pertamanya A (karena huruf keduanya pasti B).

7.44 Perhatikan pola berikut.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \ldots$$

Misalkan pecahan $\frac{1}{3}$ yang ke-n muncul pada urutan ke-U_n. Dari pola di atas telah terlihat bahwa $U_1 = 4$, karena pecahan $\frac{1}{3}$ yang ke-1 muncul pada urutan ke-4.

a. Kumpulkanlah data untuk U_1, U_2, U_3, dan U_4.
b. Temukan rumus rekursif untuk U_n.
c. Dari rumus rekursif ini, carilah rumus eksplisit dari U_n.

7.4 Barisan Fibonacci

7.4.1 Asal Mula Barisan Fibonacci

Nama Leonardo da Pisa (1170–1250), atau dikenal sebagai Fibonacci, kini amat dikenal karena menjadi nama suatu barisan bilangan. Barisan bilangan ini muncul dalam buku yang ditulis oleh Fibonacci sendiri, yaitu *Liber Abaci*. Dalam buku ini, Fibonacci menulis masalah berikut.

Seseorang menempatkan sepasang kelinci dalam suatu tempat tertentu yang dikelilingi dinding. Berapa banyak pasangan kelinci yang dapat dihasilkan dari pasangan kelinci tersebut dalam setahun, jika sifat kelinci ini adalah setiap bulan masing-masing pasangan beranak satu pasangan baru yang mulai beranak setelah berumur dua bulan?

Dengan berasumsi bahwa tidak ada kelinci yang mati dalam proses ini, kita dapat melihat bagaimana pola banyaknya kelinci tersebut setiap bulannya.

1. Pada akhir bulan pertama, baru ada sepasang kelinci awal yang ditempatkan. Mereka belum melahirkan sebab belum berumur dua bulan.
2. Pada akhir bulan kedua, lahirlah sepasang kelinci baru dari kelinci betina awal. Jadi, ada dua pasangan kelinci pada akhir bulan kedua.
3. Pada akhir bulan ketiga, kelinci betina awal melahirkan lagi sepasang kelinci baru. Jadi, ada tiga pasangan kelinci pada akhir bulan ketiga.

4. Pada akhir bulan keempat, kelinci betina awal melahirkan lagi sepasang kelinci baru, sedangkan kelinci betina yang lahir pada akhir bulan kedua juga melahirkan sepasang kelinci baru. Artinya ada dua pasang kelinci baru. Jadi, ada lima pasangan kelinci pada akhir bulan keempat.

Kita dapat meneruskan pola ini. Barisan yang kita dapatkan adalah

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Barisan inilah yang kini dinamakan *barisan Fibonacci*. Misalkan f_n menyatakan suku ke-n dari barisan Fibonacci, maka mudah dilihat bahwa

$$2 = 1 + 1 \quad \text{atau} \quad f_3 = f_1 + f_2$$
$$3 = 1 + 2 \quad \text{atau} \quad f_4 = f_2 + f_3$$
$$5 = 2 + 3 \quad \text{atau} \quad f_5 = f_3 + f_4$$
$$8 = 3 + 5 \quad \text{atau} \quad f_6 = f_4 + f_5$$

dan seterusnya. Secara umum, barisan Fibonacci dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{, jika } n = 0 \\ 1 & \text{, jika } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{, jika } n \geq 2 \end{cases}$$

Nilai $f_0 = 0$ merupakan pendefinisian tambahan.

7.4.2 Barisan Fibonacci dan Kombinatorik

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah melihat bahwa barisan Fibonacci ini muncul dalam masalah pengubinan. Kita perhatikan kembali ilustrasi pada subbab 7.3.5. Misalkan U_n menyatakan banyaknya cara sebuah persegi panjang berpetak berukuran $n \times 1$ ditutup dengan ubin-ubin berukuran 1×2 dan/atau 1×1. Kita telah melihat bahwa

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

dengan $U_1 = 1$ dan $U_2 = 2$. Dari sini kita mendapatkan barisan

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Kita bandingkan barisan ini dengan barisan Fibonacci, yaitu

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Tentu barisan $\{U_n\}$ tadi merupakan barisan Fibonacci yang suku pertamanya merupakan suku kedua, suku keduanya merupakan suku ketiga, dan seterusnya. Jadi, kita bisa menuliskan

$$\boxed{U_n = f_{n+1}}$$

Sekarang kita akan melihat masalah pengubinan yang sama, namun dengan cara pandang berbeda. Kali ini kita akan menghitung banyaknya cara melakukan pengubinan tersebut secara kombinatorik.

Penghitungan secara kombinatorik akan lebih mudah dijelaskan jika kita memandang masalah ini dengan cara berbeda. Perhatikan bahwa masalah ini ekuivalen dengan masalah menuliskan bilangan n sebagai hasil penjumlahan dari angka 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan. Perhatikan bahwa setiap susunan pengubinan terwakili oleh satu cara menuliskan bilangan n sebagai hasil penjumlahan dari 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan. Perhatikanlah tabel berikut.

n	Cara Pengubinan	Cara Penulisan n Sebagai Jumlah 1 dan 2	Banyak Cara
1		1 = 1	1
2		2 = 1 + 1 2 = 2	2
3		3 = 1 + 1 + 1 3 = 1 + 2 3 = 2 + 1	3
4		4 = 1 + 1 + 1 + 1 4 = 1 + 1 + 2 4 = 1 + 2 + 1 4 = 2 + 1 + 1 4 = 2 + 2	5

Setelah memerhatikan bahwa setiap susunan pengubinan terwakili oleh satu cara menuliskan bilangan n sebagai hasil penjumlahan dari 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan, kini kita akan melihat sisi kombinatorik dari masalah ini. Kita akan menghitung banyaknya cara menuliskan bilangan n sebagai jumlah dari angka 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan dengan cara mendaftar kemungkinan banyaknya angka yang kita gunakan.

Kita mulai dengan ketika $n = 4$. Ketika $n = 4$, kita dapat mendaftar kemungkinan-kemungkinan tersebut sebagai berikut.

1. Kemungkinan pertama, kita menggunakan 4 angka, semuanya merupakan angka 1. Berdasarkan aturan permutasi dengan pengulangan terbatas, banyaknya cara menyusun 4 angka 1 ini adalah

$$\frac{4!}{4!} = \frac{4!}{4!0!} = \binom{4}{0}$$

2. Kemungkinan kedua, kita menggunakan 3 angka, yaitu 2 angka 1 dan 1 angka 2. Berdasarkan aturan permutasi dengan pengulangan terbatas, banyaknya cara menyusun 2 angka 1 dan 1 angka 2 ini adalah

$$\frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{1}$$

3. Kemungkinan ketiga, kita menggunakan 2 angka, semuanya merupakan angka 2. Berdasarkan aturan permutasi dengan pengulangan terbatas, banyaknya cara menyusun 2 angka 2 ini adalah

$$\frac{2!}{2!} = \frac{2!}{0!2!} = \binom{2}{2}$$

Jadi, banyaknya cara menyatakan 4 sebagai jumlah dari angka 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan adalah

$$U_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$$

Kini kita akan mencoba nilai n yang lain, misalnya $n = 7$. Kita dapat mendaftar kemungkinan-kemungkinan yang ada.

1. Kemungkinan pertama, kita menggunakan 7 angka, semuanya angka 1.

$$\frac{7!}{7!} = \frac{7!}{7!0!} = \binom{7}{0}$$

2. Kemungkinan kedua, kita menggunakan 6 angka, yaitu 5 angka 1 dan 1 angka 2.

$$\frac{6!}{5!1!} = \binom{6}{1}$$

3. Kemungkinan ketiga, kita menggunakan 5 angka, yaitu 3 angka 1 dan 2 angka 2.

$$\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{2}$$

4. Kemungkinan keempat, kita menggunakan 4 angka, yaitu 1 angka 1 dan 3 angka 2.

$$\frac{4!}{1!3!} = \binom{4}{3}$$

Jadi, banyaknya cara menyatakan 7 sebagai jumlah dari angka 1 dan/atau 2 dengan memerhatikan urutan adalah

$$U_7 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3}$$

Para pembaca dapat mencoba untuk nilai n yang lain. Data yang diperoleh nantinya adalah sebagai berikut.

Nilai n	U_n secara kombinatorik	U_n secara rekursif
1	$U_1 = \binom{1}{0}$	$U_1 = f_2 = 1$
2	$U_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$	$U_2 = f_3 = 2$
3	$U_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$	$U_3 = f_4 = 3$

4	$U_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$	$U_4 = f_5 = 5$
5	$U_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$	$U_5 = f_6 = 8$
6	$U_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$	$U_6 = f_7 = 13$
7	$U_7 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3}$	$U_7 = f_8 = 21$
8	$U_8 = \binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4}$	$U_8 = f_9 = 34$
9	$U_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4}$	$U_9 = f_{10} = 55$

Secara umum, para pembaca dapat memperlihatkan bahwa:

1. Untuk n ganjil, misalkan $n = 2k + 1$, dengan $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, maka

$$U_n = f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k}$$

Bentuk ini bisa dituliskan

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{i}, \text{ dengan } n = 2k + 1$$

2. Untuk n ganjil, misalkan $n = 2k$, dengan $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, maka

$$U_n = f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k}$$

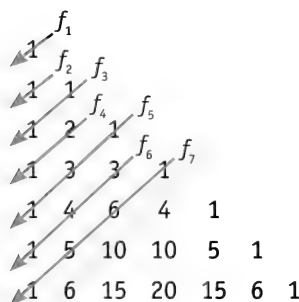
Bentuk ini bisa dituliskan

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{i}, \text{ dengan } n = 2k$$

Tentu saja dua macam penulisan berbeda yang bergantung pada paritas n ini kurang praktis. Oleh karena itu, kita dapat membuat suatu

penulisan umum yang berlaku untuk n ganjil maupun genap dengan bantuan fungsi *floor*, yaitu

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$$

Hal yang menarik adalah bahwa penulisan suku-suku barisan Fibonacci sebagai hasil penjumlahan dari kombinasi-kombinasi ini ternyata dapat kita lihat dalam segitiga Pascal (ingat kembali bahwa bilangan-bilangan yang ada di segitiga Pascal merupakan kombinasi). Pola ini akan lebih mudah kita lihat bila segitiga Pascal kita tuliskan dalam bentuk segitiga siku-siku seperti di bawah ini.

Tanda-tanda panah di atas menyatakan penjumlahan.

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$f_3 = 1 + 1 = 2$$
$$f_4 = 1 + 2 = 3$$
$$f_5 = 1 + 3 + 1 = 5$$
$$f_6 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$f_7 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

dan seterusnya.

7.4.3 Rumus Eksplisit Barisan Fibonacci

Dari definisi

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{, jika } n = 0 \\ 1 & \text{, jika } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{, jika } n \geq 2 \end{cases}$$

kita dapat mencari suatu rumus eksplisit dari barisan ini dengan menggunakan teknik yang telah kita pelajari dalam subbab sebelumnya.

Kita calonkan

$$f_n = P_1\alpha_1^n + P_2\alpha_2^n$$

dengan P_1 dan P_2 bilangan-bilangan yang akan kita tentukan nilainya, sedangkan α_1 dan α_2 akar-akar persamaan kuadrat

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

yang dapat ditentukan dengan rumus abc sehingga diperoleh

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Sehingga sekarang kita telah memiliki rumus eksplisit

$$f_n = P_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + P_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Karena $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$, diperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)P_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)P_2 = 1 \end{cases}$$

yang memiliki solusi

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$P_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Jadi, bentuk eksplisit dari suku ke-n barisan Fibonacci adalah

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Hal yang luar biasa adalah f_n selalu bernilai bilangan bulat untuk setiap nilai $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, walaupun rumus eksplisitnya memuat bentuk akar yang sepintas tidak mungkin menghasilkan bilangan bulat.

Salah satu sifat menarik dari barisan Fibonacci ini adalah hasil bagi suatu suku dengan suku sebelumnya akan mendekati suatu nilai tertentu. Untuk melihat hal ini, kita perhatikan bahwa:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1,666...$$

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\vdots$$

$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} = 1,618055555...$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{377}{233} = 1,618025751...$$

dan seterusnya.

Dari sini tampak bahwa hasil bagi suatu suku dengan suku sebelumnya akan menuju ke suatu nilai tertentu seiring dengan bertambah besarnya nilai n. Untuk nilai n yang sangat besar akan berlaku

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{n-1}f_{n-2} + f_{n-2}^{\ 2} = f_{n-1}^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = f_{n-1}^{\ 2} - f_{n-1}f_{n-2} - f_{n-2}^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right)^2 - \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} - 1$$

Akar-akar dari persamaan kuadrat ini tidak lain adalah

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

atau

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Kemungkinan kedua tidak memenuhi sebab bernilai negatif. Jadi, untuk nilai n yang semakin besar berlaku

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hal ini berarti seiring dengan bertambah besarnya nilai n, hasil bagi suatu suku dengan suku sebelumnya akan menuju ke suatu nilai tertentu, yaitu

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180...$$

Nilai ini selanjutnya disebut sebagai *rasio emas* (*golden ratio*), dan dilambangkan dengan "phi", ϕ.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Kita dapat menyatakan rumus eksplisit dari suku ke-n barisan Fibonacci dalam ϕ, yaitu

$$f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

7.4.4 Beberapa Identitas dan Pemecahan Masalah yang Berkaitan dengan Barisan Fibonacci

Pada bagian ini terlebih dahulu kita akan mencoba membuktikan beberapa identitas istimewa yang berlaku dalam suku-suku barisan Fibonacci. Tentu saja dalam membuktikan hal ini kita dapat menggunakan metode-metode pembuktian yang telah dibahas dalam bab ketiga. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 7.4.4.1

Jika f_n menyatakan suku ke-n dalam barisan Fibonacci, buktikanlah bahwa

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n-1}$$

untuk setiap bilangan bulat positif n.

Jawab

Kita gunakan induksi matematika, dengan

$$P(n) \equiv f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

(1) Sebagai langkah dasar, kita buktikan $P(1)$.

$P(1) \equiv f_1^2 = f_1 f_2 \Leftrightarrow 1^2 = 1 \times 1$

Jadi, terbukti bahwa $P(1)$ benar.

(2) Sebagai langkah induksi, kita misalkan $P(k)$ benar, yaitu

$$P(k) \equiv f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$$

Akan dibuktikan $P(k + 1)$ benar.

Perhatikanlah

$$\begin{aligned} f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_k^2 + f_{k+1}^2 &= f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 \\ &= f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) \\ &= f_{k+1} f_{k+2}, \text{ karena } f_k + f_{k+1} = f_{k+2} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(k + 1)$ benar.

Jadi, terbukti bahwa pernyataan ini benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

Para pembaca dapat mencoba membuktikan beberapa identitas yang ada dalam soal-soal berikut pada nomor 7.45 hingga 7.54. Untuk soal 7.55 hingga 7.58 adalah pemecahan masalah yang berkaitan dengan barisan Fibonacci.

Soal

7.45 Buktikan bahwa

$$f_{n+1} = 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

Gunakanlah induksi matematika untuk membuktikan setiap pernyataan berikut untuk setiap bilangan bulat positif n.

7.46 $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$

7.47 $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$

7.48 $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$

7.49 $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^{\ 2}$

7.50 (***Hanya untuk yang sudah mempelajari matriks***)

Perhatikanlah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa

$$A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Gunakan bukti langsung untuk membuktikan setiap pernyataan berikut dengan memerhatikan kembali bahwa

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

7.51 $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^{\ 2} = (-1)^n$

Petunjuk : Bagi yang sudah mempelajari matriks, perhatikan kembali matriks A pada soal sebelumnya dan gunakan sifat bahwa $\det(A^n) = [\det(A)]^n$.

7.52 $f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$

7.53 $f_{n-1}^{\ 2} + f_n^{\ 2} = f_{2n-1}$

7.54 $f_n^{\ 2} + 2f_{n-1} f_n = f_{2n}$

7.55 Carilah rumus untuk

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + \ldots + (-1)^{n+1} f_n$$

di mana f_n adalah bilangan Fibonacci ke-n.

Buktikanlah dengan induksi matematika.

7.56 Hitunglah jumlah

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\ldots+\frac{f_n}{f_{n+1}\times f_{n+2}}$$

7.57 Dapat dibuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dituliskan sebagai hasil penjumlahan dari beberapa bilangan Fibonacci berbeda. Sebagai contoh,

$$5 = f_3 + f_4$$
$$6 = f_1 + f_3 + f_4$$
$$7 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

Tuliskan bilangan 13, 52, 88, dan 143 sebagai hasil penjumlahan dari beberapa bilangan Fibonacci berbeda.

7.58 Dalam barisan Fibonacci, tunjukkan bahwa $f_5, f_{10}, f_{15}, f_{20}$, dan seterusnya selalu habis dibagi 5.

Petunjuk : Temukan sebuah rumus rekursif yang memuat f_n, f_{n-4}, dan f_{n-5}.

BAB VII
PERTIDAKSAMAAN

Pada bab terakhir ini akan dibahas beberapa hal dasar dalam pertidaksamaan. Pertama-tama akan dibahas mengenai pertidaksamaan AM-GM dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah-masalah pertidaksamaan. Kemudian pada bagian berikutnya akan dibahas suatu konstanta matematika yang penting, yaitu bilangan Euler, dengan pendekatan pertidaksamaan. Pada subbab ketiga nanti kita akan membahas masalah estimasi, yaitu bagaimana kita menaksir nilai dari suatu bentuk aljabar.

8.1 Pertidaksamaan AM-GM

Sebelum melihat pertidaksamaan AM-GM, kita akan melihat suatu pertidaksamaan yang paling mendasar. Kita mengetahui bahwa setiap bilangan real yang dikuadratkan hasilnya tidak pernah negatif, artinya jika x merupakan bilangan real maka

$$x^2 \geq 0$$

Fakta inilah yang melandasi munculnya pertidaksamaan AM-GM.

Pertidaksamaan Dasar

Untuk setiap bilangan real x berlaku

$$x^2 \geq 0$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$x = 0$$

Pertidaksamaan AM-GM merupakan suatu pertidaksamaan yang paling sering digunakan dalam menyelesaikan berbagai masalah. Singkatan AM berasal dari *Arithmetic Mean*, yaitu rata-rata aritmetika, sedangkan GM berasal dari *Geometric Mean*, yaitu rata-rata geometri.

Rata-rata aritmetika dari dua bilangan a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$, sedangkan rata-rata geometri dari a dan b adalah $\sqrt{ab}$. Adapun hubungan dari kedua jenis rata-rata ini dinyatakan dalam bentuk pertidaksamaan, yaitu sebagai berikut.

Pertidaksamaan AM-GM untuk Dua Variabel

Untuk setiap bilangan real positif a dan b berlaku

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.

Pertidaksamaan ini sangat mudah dibuktikan. Kita perhatikan bahwa menurut pertidaksamaan dasar dengan $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ berlaku

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Tentu saja kesamaan berlaku jika dan hanya jika

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b$$

Sebagai contoh penggunaan pertidaksamaan dasar dan pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel ini, perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 8.1.1

Jika p merupakan bilangan real positif, buktikan bahwa

$$p + \frac{1}{p} \geq 2$$

Jawab

Menurut pertidaksamaan dasar $x^2 \geq 0$ dengan

$$x = \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

kita memperoleh

$$\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad p - 2 \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad p + \frac{1}{p} \geq 2$$

Terbukti.

Mungkin dari contoh ini muncul pertanyaan, dari mana datangnya gagasan untuk memilih

$$x = \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Memang untuk menggunakan pertidaksamaan dasar ini seringkali diperlukan pemilihan x yang tepat. Tetapi, untuk mempermudah, kita dapat terlebih dahulu menggunakan strategi pembuktian mundur. Setelah kita mendapatkan hasil yang selalu benar, maka kita tinggal membalik urutan langkah yang kita lakukan. Sebagai contoh, untuk contoh 8.1.1 di atas kita dapat mulai berpikir dari pernyataan yang akan dibuktikan, yaitu

$$p + \frac{1}{p} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad p - 2 \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 \geq 0$$

Pertidaksamaan yang terakhir ini merupakan pertidaksamaan dasar yang selalu benar untuk setiap bilangan real positif p. Solusi dalam contoh di atas dituliskan dengan membalik urutan langkah-langkah ini.

Karena pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel kita peroleh dari pertidaksamaan dasar, maka cara lain untuk membuktikan pertidaksamaan pada contoh di atas adalah dengan langsung menggunakan pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel. Dalam hal ini ditetapkan $a = \sqrt{p}$ dan $b = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Para pembaca dapat mencobanya sebagai latihan.

Contoh 8.1.2

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, dan c berlaku

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Jawab

Berikut diberikan dua cara untuk membuktikan pertidaksamaan tersebut.

Cara I : Menurut pertidaksamaan dasar kita memperoleh

$$(a - b)^2 \geq 0$$
$$(b - c)^2 \geq 0$$
$$(c - a)^2 \geq 0$$

Dengan menjumlahkan ketiga pertidaksamaan ini diperoleh

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Terbukti.

Cara II : Dengan pertidaksamaan AM-GM kita memperoleh

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$$
$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geq \sqrt{b^2c^2}$$
$$\frac{c^2 + a^2}{2} \geq \sqrt{c^2a^2}$$

Jumlahkan ketiga pertidaksamaan ini dan dengan cara serupa akan diperoleh yang diinginkan.

Contoh 8.1.3

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real positif sehingga $a_1a_2\ldots a_n = 1$.

Buktikan bahwa

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

Jawab

Menurut pertidaksamaan AM-GM kita memperoleh

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1}$$
$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_n}$$

Kalikan semua pertidaksamaan di atas sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1+a_1}{2}\right)\left(\frac{1+a_2}{2}\right)\dots\left(\frac{1+a_n}{2}\right) \geq \left(\sqrt{1 \cdot a_1}\right)\left(\sqrt{1 \cdot a_2}\right)\dots\left(\sqrt{1 \cdot a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Karena $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ maka

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

Terbukti.

Jelas terlihat bahwa kesamaan terjadi jika $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, yang akan mengakibatkan ruas kiri bernilai

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) = \underbrace{(1+1)(1+1)\dots(1+1)}_{n}$$
$$= 2^n$$

Contoh 8.1.4

Misalkan a, b, c, d bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$16(abc + bcd + cda + dab) \leq (a + b + c + d)^3$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$16(abc + bcd + cda + dab) = 16ab(c + d) + 16cd(a + b)$$

Karena $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2$ dan $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \Leftrightarrow 4cd \leq (c+d)^2$, maka

$$\begin{aligned}16(abc + bcd + cda + dab) &\leq 4(a + b)^2(c + d) + 4(c + d)^2(a + b) \\ &= 4(a + b)(c + d)(a + b + c + d)\end{aligned}$$

Karena $\frac{(a+b)+(c+d)}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)} \Leftrightarrow 4(a+b)(c+d) \leq (a+b+c+d)^2$, maka

$$\begin{aligned}16(abc + bcd + cda + dab) &\leq (a + b + c + d)^2(a + b + c + d) \\ &= (a + b + c + d)^3\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$16(abc + bcd + cda + dab) \leq (a + b + c + d)^3$$

Soal

8.1 Buktikan bahwa untuk $a, b \geq 0$ berlaku

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

8.2 Misalkan $a, b > 0$. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

8.3 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real p berlaku

$$\frac{p^2 + 2}{\sqrt{p^2 + 1}} \geq 2$$

8.4 Buktikan bahwa jika a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real positif, maka

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

8.5 Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real positif sehingga $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(a^2 + 1\right)\left(b^2 + 1\right)\left(c^2 + 1\right) \geq 8$$

8.6 Jika a, b, dan c adalah bilangan real, buktikan bahwa

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

8.7 Jika a, b, dan c adalah bilangan real, buktikan bahwa

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ca$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

8.8 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a dan b berlaku

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq a + b + 2$$

Petunjuk : Menurut pertidaksamaan AM-GM berlaku

$$\frac{1+(2a+1)}{2} \geq \sqrt{1 \cdot (2a+1)}$$

demikian pula untuk variabel b.

8.9 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2a_k + 1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + n$$

Hal ini merupakan perumuman dari soal sebelumnya.

8.10 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real a, b, dan c berlaku

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

8.11 Jika a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real positif sehingga

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$$

Buktikan bahwa

$$\frac{1}{4a+1} + \frac{1}{4b+1} + \frac{1}{4c+1} \geq 1$$

Petunjuk : Gunakan pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel $\frac{1}{4a+1}$ dan $\frac{4a+1}{4(a+1)^2}$ untuk membuktikan bahwa $\frac{1}{4a+1} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(a+1)^2}$. Lakukan hal yang sama untuk dua variabel lainnya, jumlahkan semuanya lalu gunakan pertidaksamaan pada soal sebelumnya dengan mengganti a dengan $\frac{1}{a+1}$, b dengan $\frac{1}{b+1}$, dan c dengan $\frac{1}{c+1}$.

Setelah kita melihat pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel, kini marilah kita melihat bagaimana pertidaksamaan ini berlaku pula untuk lebih dari dua variabel. Kita mulai dengan pertidaksamaan AM-GM untuk empat variabel.

Pertidaksamaan AM-GM untuk Empat Variabel

Untuk setiap bilangan real positif a, b, c, dan d berlaku

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b = c = d$.

Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut. Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{c+d}{2}\right)}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{cd}\right)} \\ &= \sqrt[4]{abcd}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Dalam langkah-langkah pembuktian ini kita menggunakan pertidaksamaan AM-GM untuk dua variabel sebanyak dua kali, yaitu pada langkah kedua dan langkah ketiga.

Dengan terbuktinya pertidaksamaan AM-GM untuk empat variabel ini, kita dapat membuktikan pula untuk tiga variabel, yaitu dengan memandang kasus khusus ketika

$$d = \sqrt[3]{abc}$$

Jika demikian maka berlaku

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c+\sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{(abc)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c \geq 4\sqrt[3]{abc} - \sqrt[3]{abc}$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Pertidaksamaan AM-GM untuk Tiga Variabel

Untuk setiap bilangan real positif a, b, dan c berlaku

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b = c$.

Selain dengan menetapkan

$$d = \sqrt[3]{abc}$$

para pembaca juga dapat membuktikan pertidaksamaan AM-GM untuk tiga variabel ini dengan menetapkan

$$d = \frac{a+b+c}{3}$$

Para pembaca dapat mencobanya sebagai latihan.

Soal

8.12 Buktikan bahwa untuk $a, b, c, d, e, f > 0$ berlaku

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} \geq \sqrt[6]{abcdef}$$

8.13 Buktikan bahwa untuk $a, b, c, d, e > 0$ berlaku

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

Kita telah melihat bahwa pertidaksamaan AM-GM dapat dibuktikan untuk dua, tiga, empat, lima, dan enam variabel. Kini kita akan membuktikannya secara umum, yaitu untuk n variabel.

Pertidaksamaan AM-GM Umum

Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ dan bilangan-bilangan real positif a_1, a_2, ..., a_n berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Berikut akan diberikan pembuktian dengan *induksi Cauchy*. Pembuktian dengan induksi Cauchy ini merupakan pembuktian yang diberikan oleh Augustin Louis Cauchy (1789–1857), seorang matematikawan Perancis. Pembuktian dengan induksi Cauchy ini dikerjakan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Langkah dasar, yaitu membuktikan kebenaran $P(2)$.
2. Misalkan $P(k)$ benar untuk suatu $k \geq 2$. Gunakan hal ini untuk membuktikan bahwa:
   a. $P(2k)$ benar.
   b. $P(k - 1)$ benar.

Misalkan $P(2)$ telah terbukti benar. Kita perhatikan bahwa pembuktian pada langkah 2.a. adalah pembuktian pernyataan

$$P(k) \rightarrow P(2k)$$

Jika pernyataan ini telah terbukti benar, maka berlaku $P(2)$ benar, $P(4)$ benar, $P(8)$ benar, dan seterusnya. Hal ini berarti $P(2^m)$ telah terbukti benar, untuk setiap m.

Sedangkan pembuktian pada langkah 2.b. adalah pembuktian pernyataan

$$P(k) \rightarrow P(k - 1)$$

Jika pernyataan ini telah terbukti benar dan telah terbukti pula bahwa $P(2^m)$ benar, maka berlaku $P(2^m - 1)$ benar, $P(2^m - 2)$ benar, $P(2^m - 3)$ benar, dan seterusnya, untuk setiap m. Dengan kata lain, pernyataan $P(n)$ telah terbukti benar untuk setiap bilangan asli n.

Kini marilah kita mulai membuktikan pertidaksamaan AM-GM umum tersebut.

1. Sebagai langkah dasar, kita harus membuktikan pernyataan tersebut untuk $n = 2$, yaitu

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Hal ini sudah pernah kita buktikan sebelumnya.

2. Kita misalkan

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$$

untuk $k \geq 2$. Dengan menggunakan hal ini,

a. Kita harus membuktikan bahwa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k} \geq \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}$$

Buktinya adalah sebagai berikut. Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k} &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{2k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+k}}{2k} \\
&= \frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}\right) + \left(\frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+k}}{k}\right)}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+k}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\left(\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}\right)\left(\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+k}}\right)} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+k}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}
\end{aligned}$$

Terbukti.

b. Kita harus membuktikan bahwa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$$

Buktinya adalah sebagai berikut. Kita telah mengetahui bahwa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$$

Kini kita pandang kasus khusus ketika

$$a_k = \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$$

(atau $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$ juga dapat)

Jika demikian, maka berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} \geq k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \ldots a_{k-1})^{\frac{k}{k-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \geq k \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} - \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \geq (k-1) \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$$

Terbukti.

Jadi, pertidaksamaan ini telah terbukti benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Contoh 8.1.5

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, dan c dengan $abc = 1$ berlaku

$$(3a + 1)(3b + 1)(3c + 1) \geq 54$$

Jawab

Dengan menggunakan pertidaksamaan AM-GM untuk tiga variabel diperoleh

$$\frac{a + 2a + 1}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot 2a \cdot 1}$$

$$\frac{b + 2b + 1}{3} \geq \sqrt[3]{b \cdot 2b \cdot 1}$$

$$\frac{c + 2c + 1}{3} \geq \sqrt[3]{c \cdot 2c \cdot 1}$$

Dengan mengalikan ketiga pertidaksamaan di atas diperoleh

$$\frac{(3a+1)(3b+1)(3c+1)}{27} \geq \left(\sqrt[3]{2a^2}\right)\left(\sqrt[3]{2b^2}\right)\left(\sqrt[3]{2c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (3a+1)(3b+1)(3c+1) \geq 27 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}$$

Karena $abc = 1$ maka

$$(3a + 1)(3b + 1)(3c + 1) \geq 54$$

Contoh 8.1.6

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n - 1) < n^n$$

Jawab

Sebelumnya dalam contoh 3.3.1.1 kita pernah membuktikan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan AM-GM umum diperoleh

$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}$$

Karena dalam pertidaksamaan AM-GM, kesamaan terjadi jika dan hanya jika setiap variabel bernilai sama, maka kita cukup menuliskan

$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n} > \sqrt[n]{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{n} > \sqrt[n]{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \sqrt[n]{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}$$

Dengan memangkatkan n pada kedua ruas didapatkan

$$n^n > 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n - 1)$$

sebagaimana yang kita inginkan.

Soal

8.14 Misalkan a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$$

8.15 Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real positif sehingga $a + b + c = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64$$

Petunjuk : Menurut pertidaksamaan AM-GM berlaku

$$\frac{1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}{4} \geq \sqrt[4]{1\cdot 1\cdot \frac{b}{a}\cdot \frac{c}{a}}$$

Demikian pula untuk dua yang lain.

8.16 Perumum pertidaksamaan pada soal 8.15. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real positif sehingga $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Tunjukkan bahwa

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (1+n)^n$$

8.17 Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif sehingga $a + b + c = 3$. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

Petunjuk : Menurut pertidaksamaan AM-GM berlaku

$$\frac{a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}$$

Demikian pula untuk dua yang lain. Perhatikan pula bahwa

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

8.18 Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif sehingga $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Petunjuk : Menurut pertidaksamaan AM-GM berlaku

$$\frac{a^2+1}{2} \geq \sqrt{a^2\cdot 1}$$

Demikian pula untuk dua yang lain. Jumlahkan semuanya lalu gunakan pertidaksamaan AM-GM untuk tiga variabel.

8.19 Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif sehingga $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Petunjuk : Menurut pertidaksamaan AM-GM berlaku

$$\frac{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{1+b}{8}\cdot\frac{1+c}{8}}$$

Demikian pula untuk dua yang lain. Jumlahkan semuanya, lalu gunakan pertidaksamaan AM-GM untuk tiga variabel a, b, c.

8.20 Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilangan-bilangan real positif, buktikan bahwa

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geq n$$

8.21 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{n+1}{2} > (n!)^{\frac{1}{n}}$$

8.22 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} > (n!)^{\frac{2}{n}}$$

8.23 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{n(n+1)^2}{4} > (n!)^{\frac{3}{n}}$$

8.24 Manakah yang lebih besar?

$$999! \text{ atau } 500^{999}$$

Buktikan.

8.25 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\binom{2n}{n} < \left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$$

Petunjuk : Terlebih dahulu buktikan bahwa

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}$$

Kemudian gunakan hasil dalam contoh 8.1.6 dan soal 8.21.

8.26 Misalkan $a, b, c > 0$. Tunjukkan bahwa

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Petunjuk : Cobalah mengalikan bentuk pada ruas kiri.

8.27 Untuk bilangan-bilangan real positif a_1, a_1, ..., a_n, buktikan bahwa

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Misalkan a_1, a_2, ..., a_n adalah bilangan-bilangan real positif, dengan $n \geq 2$. Pertidaksamaan AM-GM untuk n variabel mengatakan bahwa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dari sini kita dapat memperoleh dua hal berikut.

(1) Dengan mengalikan kedua ruas dengan n, diperoleh

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Artinya, hasil penjumlahan n bilangan real positif a_1, a_2, ..., a_n selalu lebih dari atau sama dengan $n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Dengan kata lain, $n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ merupakan nilai terkecil (minimum) yang mungkin dari hasil penjumlahan tersebut.

(2) Dengan memangkatkan n kedua ruas, diperoleh

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$$

Artinya, hasil perkalian n bilangan real positif a_1, a_2, ..., a_n selalu kurang dari atau sama dengan $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$. Dengan kata lain, $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$ merupakan nilai terbesar (maksimum) yang mungkin dari hasil perkalian tersebut.

Contoh 8.1.7

Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x^2y^3 = 6$. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari $3x + 4y$.

Jawab

Kita akan menggunakan (1) di atas, tetapi tidak bisa langsung, yaitu

$$3x + 4y = x + x + x + y + y + y + y \geq 7\sqrt[7]{x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = 7\sqrt[7]{x^3 y^4}$$

Padahal yang diketahui adalah x^2y^3, bukan x^3y^4. Jadi, harapannya, kita harus memunculkan x^2y^3 pada ruas kanan. Oleh karena itu, yang dilakukan adalah

$$\begin{aligned}
3x+4y &= 2\left(\frac{3}{2}x\right)+3\left(\frac{4}{3}y\right)\\
&= \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}y\\
&\geq 5\sqrt[5]{\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{4}{3}y\cdot\frac{4}{3}y\cdot\frac{4}{3}y}\\
&= 5\sqrt[5]{\frac{16}{3}\cdot x^2y^3}\\
&= 5\sqrt[5]{\frac{16}{3}\cdot 6}\\
&= 10
\end{aligned}$$

Jadi, nilai terkecil yang mungkin dari $3x + 4y$ adalah 10.

Contoh 8.1.8

Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $2x + 3y = 7$. Tentukan nilai terbesar yang mungkin dari x^3y^4.

Jawab

Seperti contoh sebelumnya, gagasannya adalah mengarahkan banyaknya masing-masing variabel pada bentuk penjumlahan yang diberikan ke banyaknya masing-masing variabel pada bentuk perkalian yang diinginkan. Dalam hal ini kita tuliskan

$$7=2x+3y=3\left(\frac{2}{3}x\right)+4\left(\frac{3}{4}y\right)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y$$

Kemudian gunakan (2), yaitu

$$\frac{2}{3}x\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{4}y\cdot\frac{3}{4}y\cdot\frac{3}{4}y\cdot\frac{3}{4}y\leq\left(\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}y}{7}\right)^7$$

Sederhanakan dan gunakan kenyataan bahwa $2x + 3y = 7$, maka diperoleh

$$\frac{3}{32}\cdot x^3y^4\leq\left(\frac{7}{7}\right)^7$$

yang ekuivalen dengan

$$x^3y^4 \le \frac{32}{3}$$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari x^3y^4 adalah $\frac{32}{3}$.

Soal

8.28 Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x^3y^2 = \frac{27}{50}$. Tentukan nilai minimum dari $2x + 5y$.

8.29 Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x + y = 5$. Tentukan nilai maksimum dari x^2y^3.

8.30 Tunjukkan bahwa nilai terbesar yang mungkin dari xy^2z^3 adalah $\frac{27}{16}$, di mana x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x + y + z = 3$.

8.31 Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif. Misalkan pula a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan bulat positif. Jika $x^a y^b = P$, maka buktikan bahwa nilai terkecil yang mungkin dari $cx + dy$ adalah $(a+b)\sqrt[a+b]{\left(\frac{c}{a}\right)^a\left(\frac{d}{b}\right)^b P}$.

8.32 Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif. Misalkan pula a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan bulat positif. Jika $ax + by = P$, maka buktikan bahwa nilai terbesar yang mungkin dari $x^c y^d$ adalah $\left(\frac{c}{a}\right)^c\left(\frac{d}{b}\right)^d\left(\frac{P}{c+d}\right)^{c+d}$.

8.2 Bilangan Euler

Semenjak duduk di bangku Sekolah Dasar, kita telah mengenal bilangan π, yaitu konstanta yang menyatakan perbandingan antara keliling suatu lingkaran dan diameternya. Nilai konstanta ini sampai dengan sepuluh tempat desimal tanpa dibulatkan adalah

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Tentu saja π merupakan bilangan irasional. Tidak ada pola yang tetap dari digit-digitnya.

Kini kita akan melihat suatu konstanta irasional lain di matematika yang tidak kalah penting, yaitu bilangan Euler. Bilangan yang diberi nama sebagai penghargaan bagi seorang ahli matematika Swiss, Leonhard Euler (1707–1783) ini dinotasikan dengan huruf e dan nilainya sampai dengan sepuluh tempat desimal tanpa dibulatkan adalah

$$e = 2{,}7182818245\ldots$$

Para pembaca yang sudah mempelajari kalkulus mengenal konstanta e sebagai basis dari logaritma natural.

$$\ln x = {}^{e}\log x$$

Kita tidak akan membahas bilangan Euler secara kalkulus, melainkan kita akan membahasnya dengan pendekatan pertidaksamaan. Perhatikanlah satu contoh berikut.

Contoh 8.2.1

Buktikan bahwa untuk bilangan-bilangan real positif berbeda a dan b berlaku

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$$

Jawab

Dengan menggunakan pertidaksamaan AM-GM diperoleh

$$\frac{a+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{n}}{n+1} > \sqrt[n+1]{a\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{a+nb}{n+1} > \sqrt[n+1]{ab^n}$$

Terbuktilah yang diinginkan.

Pertidaksamaan pada contoh di atas menjadi dasar bagi penalaran kita berikut ini. Perhatikan bilangan

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dan

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Sifat dari kedua bilangan ini dapat kita lihat dengan menggunakan pertidaksamaan pada contoh di atas. Dengan menetapkan

$$a = 1$$

$$b = 1 + \frac{1}{n}$$

pertidaksamaan tersebut akan menjadi

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n + 1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_n < x_{n+1}$$

Artinya, untuk setiap n yang semakin besar, nilai x_n akan semakin membesar pula. Para pembaca dapat memperlihatkan pula dengan menetapkan

$$a = 1$$

$$b = 1 - \frac{1}{n}$$

dengan cara serupa kita juga akan mendapatkan

$$z_n < z_{n+1}$$

Hal ini berarti untuk setiap nilai n yang semakin besar, nilai z_n akan semakin membesar pula. Secara matematis, dikatakan bahwa x_n dan z_n monoton naik. Tetapi sekarang perhatikan bilangan

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Kita perhatikan bahwa

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z_{n+1}}$$

Kini kita dapat melihat bahwa nilai y_n adalah kebalikan dari nilai z_{n+1}. Karena dengan semakin membesarnya nilai n maka nilai z_{n+1} semakin membesar, maka nilai y_n akan semakin mengecil.

Fokus kita sekarang adalah pada x_n dan y_n. Jika kita mensubstitusikan nilai-nilai bilangan asli n yang semakin membesar, kita akan mendapatkan hasil seperti pada tabel berikut, yang dituliskan sampai dengan empat angka desimal.

N	$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	2,0000	4,0000
2	2,2500	3,3750
3	2,3704	3,1605
4	2,4414	3,0518
5	2,4883	2,9860
10	2,5937	2,8531
15	2,6329	2,8084
20	2,6533	2,7860
25	2,6658	2,7725
30	2,6743	2,7635

40	2,6851	2,7522
50	2,6916	2,7454
100	2,7048	2,7319
200	2,7115	2,7251
500	2,7156	2,7210
1000	2,7169	2,7196
2000	2,7176	2,7190
3000	2,7178	2,7187
5000	2,7180	2,7186
10000	2,7181	2,7184
20000	2,7182	2,7183

Perhatikan bahwa seiring membesarnya nilai n, maka nilai x_n dan y_n akan semakin mendekat ke suatu nilai di antaranya. Nantinya di suatu nilai n yang sangat besar, nilai x_n dan y_n tersebut akan sama. Nilai yang sama ini sekarang kita sebut sebagai batas. Tetapi kita tidak dapat menggapai nilai n yang sangat besar tersebut, sebab nilai n yang demikian mendekati tak berhingga. Batas dari nilai x_n dan y_n tersebutlah yang dinamakan dengan bilangan Euler. Oleh karena itu, untuk setiap bilangan asli n, bilangan Euler memenuhi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Soal

8.33 Dengan menggunakan hasil di atas, buktikan bahwa

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

untuk setiap bilangan asli n.

8.34 Gunakan pertidaksamaan pada soal 8.33 untuk membuktikan bahwa

$$\ln\left(k+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{kn} < \ln\left(k+\frac{k}{n-1}\right)$$

untuk setiap bilangan asli n dan k.

8.35 (*Hanya untuk yang sudah mempelajari kalkulus*)

Gunakan pertidaksamaan pada soal 8.34 untuk menentukan nilai dari

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{kn}\right)$$

dengan menggunakan prinsip apit.

8.36 Untuk setiap bilangan asli n, misalkan

$$N=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

Buktikan bahwa

$$e^N > n + 1$$

Petunjuk : Dari soal 8.33, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$. Substitusikan $k=1, 2, 3, \ldots, n$ lalu jumlahkan semua pertidaksamaan yang diperoleh.

8.3 Estimasi

Apa yang kita lakukan pada pembahasan tentang bilangan Euler di atas disebut estimasi atau penaksiran. Pada bagian ini kita akan membahas beberapa masalah estimasi lain. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 8.3.1

Buktikan bahwa

$$\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$$

Jawab

Gagasan untuk membuktikan hal ini adalah dengan memisalkan

$$A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}$$

$$B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{100}$$

Kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\frac{5}{6}<\frac{6}{7},\ldots,\frac{97}{98}<\frac{98}{99},\frac{99}{100}<\frac{100}{100}$$

Oleh karena itu,

$$A < B$$

Jika kedua ruas kita kalikan A, diperoleh

$$\begin{aligned} A^2 &< AB \\ &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{100}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\times\frac{100}{100} \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Sehingga

$$A^2 < \frac{1}{100}$$

Dengan menarik akar kedua ruas didapat

$$A < \frac{1}{10} \qquad (1)$$

Selanjutnya kita perhatikan pula bahwa

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A \\ &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}\right) \end{aligned}$$

Karena $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}, \frac{5}{6} > \frac{4}{5}, \ldots, \frac{97}{98} > \frac{96}{97}, \frac{99}{100} > \frac{98}{99}$, kita memperoleh

$$\begin{aligned} &> \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{96}{97}\times\frac{98}{99}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{97}{98}\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{200} \end{aligned}$$

Sehingga

$$A^2 > \frac{1}{200}$$

Dengan menarik akar kedua ruas didapat

$$A > \frac{1}{10\sqrt{2}} \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Terbukti.

Soal

8.37 Manakah yang lebih besar?

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{999999}{1000000} \text{ atau } \frac{1}{1000}$$

Buktikan.

8.38 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

8.39 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

8.40 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{2n}}$$

Petunjuk : Hitunglah $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ lalu gunakan soal 8.38.

Contoh 8.3.2

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} &= \frac{2}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \\ &< \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \\ &= 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1} \qquad (1)$$

Sedangkan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} &= \frac{2}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \\ &> \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ &= 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh pula

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

Terbukti.

Contoh 8.3.3

Hitunglah hasil penjumlahan

$$\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

dengan kesalahan tidak lebih dari $\frac{1}{50}$.

Jawab

Dari pertidaksamaan pada contoh 8.3.2 kita memperoleh

$$2\sqrt{10001}-2\sqrt{10000}<\frac{1}{\sqrt{10000}}<2\sqrt{10000}-2\sqrt{9999}$$

$$2\sqrt{10002}-2\sqrt{10001}<\frac{1}{\sqrt{10001}}<2\sqrt{10001}-2\sqrt{10000}$$

$$2\sqrt{10003}-2\sqrt{10002}<\frac{1}{\sqrt{10002}}<2\sqrt{10002}-2\sqrt{10001}$$

$$\vdots$$

$$2\sqrt{1000001}-2\sqrt{1000000}<\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2\sqrt{1000000}-2\sqrt{999999}$$

Dengan menjumlahkan semua pertidaksamaan di atas didapatkan

$$2\sqrt{1000001}-200<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

$$<2000-2\sqrt{9999}$$

Selang ini dihampiri oleh

$$1800<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<1800,02$$

Karena $1800,02 - 1800 = 0,02$ maka lebar selang ini tidak melebihi $0,02=\frac{1}{50}$, sehingga kita selesai.

Kita perhatikan kembali contoh 8.3.3 di atas. Para pembaca yang telah mempelajari kalkulus tidak perlu menggunakan kalkulator pada langkah terakhir. Kita dapat menggunakan hampiran Taylor untuk mengaproksimasi nilai dari $\sqrt{1000001}$ dan $\sqrt{9999}$.

Penghitungan di atas merupakan penghitungan yang luar biasa. Walaupun kita tidak dapat menemukan bentuk tertutup dari jumlah

$$\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\frac{1}{\sqrt{10002}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

kita dapat menghitung nilai dari jumlah ini sampai dengan kesalahan yang tidak melebihi 0,02 tanpa menggunakan kalkulator. Toleransi kesalahan ini tentu sangatlah kecil.

Soal

8.41 Misalkan bilangan 2,34. Bilangan 2 disebut bagian bulatnya. Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$$

8.42 Hitunglah hasil penjumlahan

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

dengan kesalahan tidak lebih dari 0,9.

8.43 Buktikan bahwa

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}$$

8.44 Buktikan pertidaksamaan

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

8.45 Gunakan pertidaksamaan pada soal 8.44 untuk membuktikan bahwa

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}$$

8.46 Buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}}$$

Petunjuk : Ubahlah bentuk pada ruas tengah menjadi deret teleskopis.

8.47 Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$1^{-\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}+\ldots+10000^{-\frac{2}{3}}$$

Petunjuk : Gunakan gagasan

$$\frac{3}{(k+1)^{\frac{2}{3}}+(k+1)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}+k^{\frac{2}{3}}}<\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}<\frac{3}{k^{\frac{2}{3}}+k^{\frac{1}{3}}(k-1)^{\frac{1}{3}}+(k-1)^{\frac{2}{3}}}$$

untuk setiap sukunya. Bentuk di ruas kiri dan kanan dapat dirasionalkan sehingga diperoleh bentuk yang saling menghapuskan bila dijumlahkan.

Contoh 8.3.4

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n>1$ berlaku

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2\times 2}<\frac{1}{1\times 2}$$
$$\frac{1}{3\times 3}<\frac{1}{2\times 3}$$
$$\frac{1}{4\times 4}<\frac{1}{3\times 4}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n\times n}<\frac{1}{(n-1)\times n}$$

Jumlah dari semua pertidaksamaan di atas adalah

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$$

Dengan menambahkan 1 pada kedua ruas didapatkan

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

sebagaimana yang diinginkan.

Contoh 8.3.5

Buktikan bahwa

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2011}>6$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2011}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+\frac{1}{515}+\ldots+\frac{1}{1024}\right)+\frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\frac{1}{1027}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2011}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\ldots+\frac{1}{1024}\right)+\frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\frac{1}{1027}$$

$$+\ldots+\frac{1}{2011}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{16}+\ldots+512\times\frac{1}{1024}\right)+\frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\frac{1}{1027}$$

$$+\ldots+\frac{1}{2011}$$

$$= 1 + \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{10}\right) + \frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \frac{1}{1027} + \ldots + \frac{1}{2011}$$

$$= 1 + 10 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \frac{1}{1027} + \ldots + \frac{1}{2011}$$

$$= 6 + \frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \frac{1}{1027} + \ldots + \frac{1}{2011}$$

$$> 6$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2011} > 6$$

Contoh 8.3.6

Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$\frac{1}{\frac{1}{1984} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \ldots + \frac{1}{1999}}$$

Jawab

Kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{1984} > \frac{1}{1999}$$
$$\frac{1}{1985} > \frac{1}{1999}$$
$$\frac{1}{1986} > \frac{1}{1999}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1998} > \frac{1}{1999}$$

Jumlahkan semua pertidaksamaan di atas sehingga diperoleh

$$\frac{1}{1984} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \ldots + \frac{1}{1998} > \underbrace{\frac{1}{1999} + \frac{1}{1999} + \frac{1}{1999} + \ldots + \frac{1}{1999}}_{\text{sebanyak } 15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1984} + \frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \ldots + \frac{1}{1998} > 15 \times \frac{1}{1999}$$

Tambahkan kedua ruas dengan $\frac{1}{1999}$, didapatkan

$$\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999} > \frac{16}{1999} \quad (1)$$

Kita perhatikan pula bahwa

$$\frac{1}{1985} < \frac{1}{1984}$$
$$\frac{1}{1986} < \frac{1}{1984}$$
$$\frac{1}{1987} < \frac{1}{1984}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{1984}$$

Jumlahkan semua pertidaksamaan di atas sehingga diperoleh

$$\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\frac{1}{1987}+\ldots+\frac{1}{1999} < \underbrace{\frac{1}{1984}+\frac{1}{1984}+\frac{1}{1984}+\ldots+\frac{1}{1984}}_{\text{sebanyak 15}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\frac{1}{1987}+\ldots+\frac{1}{1999} < 15\times\frac{1}{1984}$$

Tambahkan kedua ruas dengan $\frac{1}{1984}$, didapatkan

$$\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\frac{1}{1987}\ldots+\frac{1}{1999} < \frac{16}{1984} \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{16}{1999} < \frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999} < \frac{16}{1984}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1984}{16} < \frac{1}{\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}} < \frac{1999}{16}$$

$$\Leftrightarrow 124 < \frac{1}{\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}} < 124{,}9375$$

Dari sini jelas terlihat bahwa bagian bulat pada hasil dari

$$\frac{1}{\frac{1}{1984}+\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+\ldots+\frac{1}{1999}}$$

adalah 124.

Contoh 8.3.7

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

Jawab

Jumlah ini dapat kita tulis sebagai

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+n}$$

yang berarti ada n suku dalam penjumlahan ini.

Kita perhatikan bahwa karena $n > 1$ maka diperoleh

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n}$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n}$$
$$\frac{1}{n+3} > \frac{1}{n+n}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n+(n-1)} > \frac{1}{n+n}$$

Jumlah dari $(n - 1)$ pertidaksamaan di atas adalah

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)} > \underbrace{\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{n+n}}_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)} > (n-1)\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)} > n\left(\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Selanjutnya kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\right]+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\right]}{2}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+(n-1)}\right]+\left[\frac{1}{n+(n-1)}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right]+\frac{2}{2n}}{2}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+(n-1)}\right]+\left[\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+(n-2)}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+1}\right]+\frac{1}{n}}{2}$$

$$=\frac{\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{2n^2+2(n-2)}+\ldots+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{3n^2}}{2}$$

$$<\frac{\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}}{2}$$

$$=\frac{n\left(\frac{3n}{2n^2}\right)}{2}$$

$$=\frac{3}{4}$$

Jadi, kita telah mendapatkan bahwa

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4} \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$$

Terbukti.

Soal

8.48 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ dan $k > 1$ berlaku

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{kn}>1-\frac{1}{k}$$

8.49 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1$$

8.50 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ dan $k > 1$ berlaku

$$\frac{2k}{2n+k+1}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+k}<\frac{k}{n}$$

Petunjuk : Terlebih dahulu buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif berbeda x dan y berlaku

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{4}{x+y}$$

8.51 Misalkan

$$S=\frac{1}{1902}+\frac{1}{1903}+\frac{1}{1904}+\ldots+\frac{1}{2011}$$

a. Taksirlah $\frac{1}{S}$ seperti pada contoh 8.3.6.

b. Taksirlah $\frac{1}{S}$ dengan menggunakan pertidaksamaan pada soal 8.50.

c. Penaksiran manakah yang lebih baik? Gunakan penaksiran yang lebih baik tersebut untuk menentukan bagian bulat dari $\frac{1}{S}$.

8.52 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n dan p berlaku

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}$$
$$<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

8.53 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2$$

Petunjuk : Perhatikanlah bahwa

$$\frac{1}{(2n+1)-k}+\frac{1}{(2n+1)+k}=\frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2-k^2}>\frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2}$$
$$=\frac{2}{2n+1}$$

Gunakanlah hal ini untuk k = 1, 2, 3 ..., n.

8.54 Buktikan bahwa

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2011!}<2$$

Petunjuk : Perhatikanlah bahwa

$$\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2},\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3},\frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4},\ldots,\frac{1}{2011!}<\frac{1}{2^{2010}}$$

8.55 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1+3}{1^3+2^3}+\frac{1+3+5}{1^3+2^3+3^3}+\ldots+\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}<\frac{4n}{n+1}$$

8.56 Perhatikan kembali bahwa

$$1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{1}{2}n(n+1)$$

merupakan pola bilangan segitiga. Buktikan bahwa

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{1993006}}$$
$$>1001$$

8.57 Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

8.58 Misalkan n sebarang bilangan bulat dengan $n \geq 2$. Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$1+\sqrt{1+\frac{2^2}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{3^2}{4!}}+\ldots+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}}$$

Petunjuk : Perhatikanlah bahwa

$$1 < \sqrt[k]{1 + \frac{k^2}{(k+1)!}} < 1 + \frac{k}{(k+1)!}$$

8.59 Tentukan bagian bulat pada hasil dari

$$\frac{3^1+1}{3^1-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{3^3+1}{3^3-1} + \ldots + \frac{3^n+1}{3^n-1}$$

Petunjuk : Perhatikanlah bahwa

$$\frac{3^k+1}{3^k-1} = 1 + \frac{2}{3^k-1}$$

dan

$$1 + \frac{2}{3^k} < 1 + \frac{2}{3^k-1} \leq 1 + \frac{2}{2^k}$$

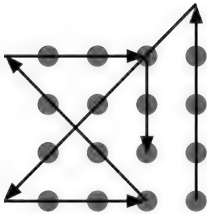
8.60 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}$$

Petunjuk : Pandanglah $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^2$ yang penjabarannya terdiri dari sebanyak n^2 suku, susunlah menjadi n kumpulan bilangan yang masing-masing berupa deret bilangan n suku yang nilai setiap sukunya kurang dari atau sama dengan nilai setiap suku pada deret dalam contoh 8.3.4.

JAWABAN SOAL-SOAL NON PEMBUKTIAN

BAB I

1.1 Salah satu jawabannya adalah sebagai berikut.

1.2 Memasukkannya ke dalam kotak berbentuk kubus berukuran 1 m × 1 m × 1 m secara diagonal ruang.

1.3 Tahun tersebut adalah tahun Sebelum Masehi.

1.4 Kosongkan kotak paku payung. Tempelkan kotak tersebut pada dinding dengan sebuah paku payung. Pasanglah lilin tersebut pada kotak ini.

1.5 Ia memotong tali tersebut menjadi dua bagian secara vertikal, sehingga menjadi dua buah tali yang lebih tipis masing-masing sepanjang 5 meter.

BAB I

2.1 30

2.2 120

2.3 625

2.4 8

2.5 a. 4^{10} b. 5^{10}

2.6 a. 720   b. 360

2.7 1680

2.8 16

2.9
a. 840
b. 128
c. 121

2.10
a. 48
b. 12
c. 40
d. 20

2.11 297

2.12 148

2.13 243

2.14 10

2.15 3548880

2.16 20301

2.17 26151

2.18 4

2.19 44402

2.20
a. 120
b. 60
c. 20
d. 60
e. 32
f. 88
g. 92
h. 36

2.21 78

2.22 41

2.23 1560

2.24 72

2.25 a. 40320   d. 576
b. 1152   e. 10080
c. 2880

2.26 5760

2.27 3845961

2.28 156

2.29 11880

2.30 a. 720   b. 4320

2.31 240

2.32 7500

2.33 362880

2.34 a. 360   b. 72

2.35 a. 120   c. 12
b. 48   d. 12

2.36 4464

2.37 a. 105   b. 455

2.38 350

2.39 a. 100   b. 55

2.40 435

2.41 40

2.42 35

2.43 30

2.44 2520

2.45 504

2.46 a. 34650 b. 27720

2.47 a. 630630 b. 630630

2.48 38

2.49 a. 161 b. 40

2.50 42

2.51 a. 300
b. 480
c. 360
d. 465
e. 210
f. 450
g. 240

2.52 4245

2.53 56

2.54 120

2.55 85

2.56 20

2.57 308

2.58 a. $20!$
b. $20 \times 19!$
c. $20 \times 16 \times 18!$
d. $P(20,14) - 5 \times P(16,14)$

2.59 a. 602800
b. 105840
c. 120

2.60 a. 128
b. 21
c. 64
d. 127
e. 63

2.61 2^{16}

2.62 3^{8}

2.63 a. 5040 d. 4860
b. 144 e. 1440
c. 1260

2.64 1260

2.65 240

2.66 a. 120 c. 12
b. 40

2.67 720

2.68 12

2.69 a. 462 c. 252
b. 210

2.70 a. 924 d. 54
b. 210 e. 366
c. 210 f. 558

2.71 a. 66 f. 21
b. 55 g. 3
c. 15 h. 27
d. 10 i. 4
e. 9

2.73 a. 1365 d. 330
b. 5 e. 1364
c. 15 f. 35

2.74 10

2.75 27

2.76 28

2.77 952

2.78 a. 7315
b. 1540
c. 60

2.79 441

2.80 12612600

2.81 91

2.82 10

2.83 6561

2.84 a. 4495
b. 2925

2.85 462

2.86 a. 6238
b. 27720
c. 27720
d. 13860
e. 83160

2.87 a. 60
b. 6
c. 10
d. 1

2.88 a. 150
b. 25
c. 6
d. 2

2.90 a. 5
b. 4

2.92 $n + 1$

2.93 a. 4
b. 8
c. $n + 1$

2.94 a. 18
b. 19
c. 18

2.95 a. $n + 1$
b. $n + 1$

2.96 a. 7
b. 18

2.97 a. 5
b. 41
c. 14
d. 50

2.98 45 menit

2.99 27

2.106 a. Benar.

b. Tidak.

c. Tidak.

2.111 18

2.113 61

2.114 a. 9

b. 19

2.115 a. 4

b. 27

c. 1) 50

2) 51

3) 43

2.116 b. 1) 599

2) 1197

3) 598m – 597

2.117 $32x^5 + 80x^3 + 80x + \frac{40}{x} + \frac{10}{x^3} + \frac{1}{x^5}$

2.118 a. 6750

b. -448

c. -1512

d. $\frac{21}{2}$

2.119 a. $\frac{112}{729}$

b. $\frac{5}{4}$

2.120 a. 3

b. 1 atau -1

c. 5

2.121 10

2.122 116

2.123 3

2.134 616666

2.135 $\frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

2.136 4018

2.137 a. Hal tersebut memperlihatkan berlakunya

$$11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0}10^n + \binom{n}{1}10^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}10^0$$

untuk $0 \le n \le 3$.

b. Hal ini berlaku untuk $n = 4$, yaitu

$$11^4 = (10+1)^4 = \binom{4}{0}10^4 + \binom{4}{1}10^3 + \binom{4}{2}10^2 + \binom{4}{3}10^1 + \binom{4}{4}10^0$$

Kita perhatikan bahwa setiap bilangan asli N dapat dituliskan sebagai

$$N = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \ldots + a_n \times 10^0$$

dengan a_0, a_1, ..., a_n adalah digit-digit dari N. Di sini tentu berlaku

$$0 \le a_i \le 9$$

untuk $i = 0, 1, \ldots, n$.

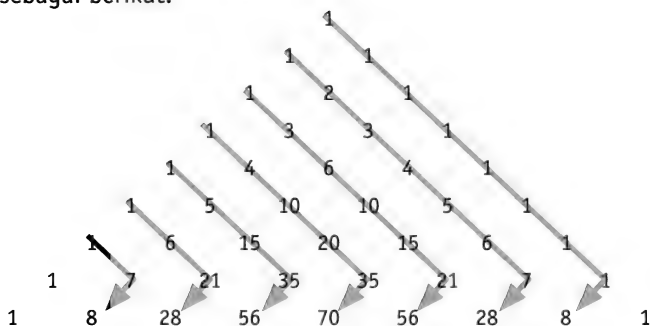
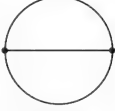
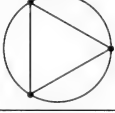
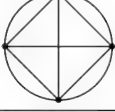
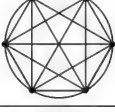
Khususnya untuk $n = 4$ tadi,

$$a_i = \binom{4}{i}$$

Sedangkan untuk $n = 5$, ada a_i yang berada di luar interval $0 \le a_i \le 9$, yaitu

$$a_2 = \binom{5}{2} = 10$$

Ini membuat hal tersebut tidak berlaku untuk $n = 5$, demikian pula untuk $n > 5$.

2.138 b. Contoh keberadaan identitas ini dalam segitiga Pascal adalah sebagai berikut.

$$1 + 7 = 8$$
$$1 + 6 + 21 = 28$$
$$1 + 5 + 15 + 35 = 56$$
$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$$
$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

2.140

Gambar	Banyaknya						
	Titik	Garis	Segitiga	Segi-empat	Segilima	Segi-enam	Segitujuh
	1						
	2	1					
	3	3	1				
	4	6	4	1			
	5	10	10	5	1		
	6	15	20	15	6	1	
	7	21	35	35	21	7	1

Pola yang terlihat adalah pola segitiga Pascal tanpa bilangan pertama dalam setiap barisnya.

2.141 a. $\binom{n+1}{2}$

d. $\binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}$

b. $\binom{n+2}{3}$

e. $\binom{3n-3}{n-1}$

c. $\binom{2n-2}{n-1}$

2.142 -11340

2.143 8304

2.144 $C(k + n - 1, n)$

BAB I

3.7 $481 = 20^2 + 9^2 = 15^2 + 16^2$

3.12 a. 666

3.55 "Jika a dan b bilangan-bilangan bulat yang sama-sama genap atau sama-sama ganjil, maka terdapat bilangan-bilangan bulat m dan n sehingga $a = m + n$ dan $b = m - n$."

3.56 "Jika a bilangan real, maka $ax = 0$ mengakibatkan $a = 0$ atau $x = 0$."

3.60 Pernyataan tersebut salah, misalnya untuk $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, dan $h(x) = 1$.

3.70 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$= \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)$

3.79 Untuk $n = 1$, bentuk tersebut menjadi

$$1 = 1^2 + 1$$

yang jelas salah.

3.80 Pada langkah dasar di ruas kiri disubstitusikan $n = 2$, sedangkan di ruas kanan disubstitusikan $n = 1$.

3.89 Untuk $n \geq 4$.

3.93 Jumlah berapapun yang lebih dari atau sama dengan 24 Pluton.

3.94 c. Terbukti bahwa jika kita memulai dengan n koin, bagaimanapun langkah yang kita lakukan selalu menghasilkan skor akhir

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

3.98 10

3.99 8

3.100 39

3.101 a. 9

b. 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120

3.102 7

3.103 24

3.104 $251 = 1^3 + 5^3 + 5^3 = 2^3 + 3^3 + 6^3$

3.105 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97

3.106 59

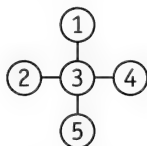
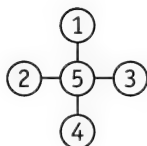
3.107 120 saja

3.108 7744

3.109 $2011 = 157 + 163 + 167 + 173 + 179 + 181 + 191 + 193 + 197 + 199 + 211$

3.110 b. Mulai dengan 24, kemudian $2 \times 4 = 8$, berhenti.

c. 77

3.111 Salah satu solusi yang mungkin adalah sebagai berikut.

Terdapat lebih dari satu solusi. Salah satu solusi yang lain adalah sebagai berikut.

3.112 Merah.

3.113 Putih.

3.114 Kartu-kartu mereka masing-masing adalah sebagai berikut. Kartu Emy bernomor 1, 8, 12, kartu Paulus bernomor 3, 5, 13, kartu Dewi bernomor 4, 6, 11, dan kartu Condro bernomor 2, 9, 10. Jadi, nomor kartu Condro yang nilainya di tengah di antara tiga kartu yang dimilikinya adalah 9.

3.115 6030

3.116 20

3.117 45

3.118 513

3.119 2674

3.120 192

3.121 1074

3.122 190

3.123 219

3.124 Jawabannya adalah sebagai berikut.

Ukuran Segitiga	Banyaknya Segitiga yang Menghadap ke		Jumlah
	Atas	Bawah	
1 – 1 – 1	6	6	12
2 – 2 – 2	3	3	6
3 – 3 – 3	1	1	2
Total			20

3.125 36

3.126 29

3.127 a. 500500 c. 250000

b. 250500

3.128 a. 5150 d. 15150

b. 10100 e. 15250

c. 10000 f. 20100

3.129

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

a. 10000

b. n^2

3.130 $\dfrac{3^{2^{n+1}} - 1}{2}$

3.131 $x = 5$ dan $y = 1$.

3.132 $x = -2$, $y = 2$, $v = -2$, dan $u = 2$.

3.133 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, dan $x_5 = 3$.

3.134 a. 73

b. 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14

3.135 a. Ketiga persamaan yang diperoleh adalah

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b+4c=6 \\ b+4c=9 \end{cases}$$

b. $a = 1$, $b = -3$, dan $c = 3$

c. 334

3.136 a. Diperoleh persamaan yang sederhana

$$pq = 4$$

b. Kemungkinan-kemungkinan nilai p dan q yang memenuhi persamaan tersebut adalah

p	q
1	4
2	2
4	1
-1	-4
-2	-2
-4	-1

c. Setiap kasus di atas memberikan pasangan-pasangan (x,y) berturut-turut (3,6), (4,4), (6,3), (1,-2), (0,0), (2,-1). Salah satu di antaranya yaitu (0,0) tentu tidak memenuhi. Jadi, pasangan-pasangan (x,y) yang memenuhi adalah (3,6), (4,4), (6,3), (1,-2), dan (2,-1).

3.137 $pq = n^2$

3.138 a. Dengan $y = x^2 + 5x$, bentuk tersebut dapat ditulis menjadi

$$(y + 4)(y + 6) - 3 = y^2 + 10y + 21$$

b. $(y + 3)(y + 7) = (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$

3.139 $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

3.140 a. $(x + 1)(y + 1) = 6$ b. (1,2), (2,1)

3.141 (1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (2,4,1), (4,1,2), (4,2,1)

3.142 (6,10,12), (6,12,10), (10,6,12), (10,12,6), (12,6,10), (12,10,6)

3.143 (1,4,6), (1,6,4), (4,1,6), (4,6,1), (6,1,4), (6,4,1)

3.144 13 dan 79

3.145 $\binom{n-1}{m-1}$

3.146 $3\sqrt{10}$ meter

3.147 Sistem persamaan tersebut memiliki nol solusi untuk $a < -\sqrt{2}$ atau $a > \sqrt{2}$, memiliki dua solusi untuk $a = \pm\sqrt{2}$, dan memiliki empat solusi untuk $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

3.148 $\frac{1}{2}\text{arcsec}\left(x^2\right) + C$

3.149 $\frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} + C$

3.150 $\frac{\sqrt{2x^4 - 2x^2 + 1}}{2x^2} + C$

3.151 $\frac{2\sqrt{x^3 + x + 1}}{x} + C$

3.152 32 orang

3.153 Rp62.500.000,00

3.154 8

3.155 $\sqrt[10]{10!}$

3.156 60 tahun

3.157 a. $\sqrt{2}$ b. 1

3.158 6

3.159 a. 5 b. $\sqrt[k-1]{n}$

3.160 a. 6 b. 2

3.161 2

3.162 a. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=\frac{S}{3}$

$$\frac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots}{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots}=3$$

b. $$\frac{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots}{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}+\ldots}=7$$

c. $$\frac{\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots}{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{8^p}+\ldots}=2^p-1$$

3.163 $\frac{1}{6}$

3.164 $\frac{1}{3}$

3.165 $\frac{1}{2}$

3.166 Misalkan b menyatakan banyaknya beras dalam Kg dan k menyatakan banyaknya keluarga yang ada.

$$\begin{cases} b = 10k + 15 \\ b = 15(k-2) + 10 \end{cases}$$

Jawabannya adalah 7 keluarga.

3.167 Misalkan h menyatakan banyaknya kartu Handi semula dan s menyatakan banyaknya kartu Surya semula.

$$\begin{cases} s + \frac{1}{5}h = 3\left(\frac{4}{5}h\right) - 12 \\ \frac{4}{5}h + \frac{1}{4}\left(s + \frac{1}{5}h\right) = \frac{3}{4}\left(s + \frac{1}{5}h\right) \end{cases}$$

Jawabannya adalah 36 kartu.

3.168 Misalkan p menyatakan banyaknya anak pria dan w menyatakan banyaknya anak wanita.

$$\begin{cases} p-1=w \\ w-1=\frac{5}{6}p \end{cases}$$

Jawabannya adalah 23 anak.

3.169 Misalkan m menyatakan banyaknya bola merah dan h menyatakan banyaknya bola hijau.

$$\begin{cases} \frac{1}{10}(m+h-4)=m-4 \\ \frac{1}{5}(m+h-4)=m \end{cases}$$

Jawabannya adalah 8 bola merah dan 36 bola hijau.

3.170 Misalkan b menyatakan banyaknya baris dan p menyatakan banyaknya pohon dalam setiap baris.

$$\begin{cases} bp=(p+6)(b-10) \\ bp=(p+3)(b-6) \end{cases}$$

Jawabannya adalah 360 pohon.

3.171 Misalkan untuk mencapai titik di mana kedua jarum ini berimpit, jarum jam bergerak sejauh j dan jarum menit bergerak sejauh m.

$$\begin{cases} m=3+j \\ m=12j \end{cases}$$

Jawabannya adalah pukul 3 lebih $\frac{3}{11}\times 60$ menit, atau pukul 3 lebih $\frac{180}{11}$ menit.

3.172 Tidak dapat.

3.173 254

3.174 2

3.177 a. Untuk n ganjil, $f(n) = \dfrac{n^2 - 1}{4}$.

Untuk n genap, $f(n) = \dfrac{n^2}{4}$.

3.179 Tidak dapat.

3.180 Tidak dapat.

3.181 Tidak dapat.

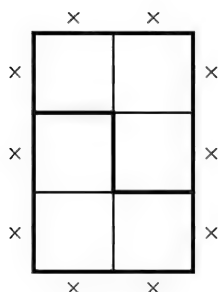
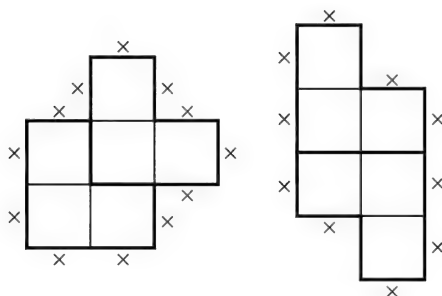
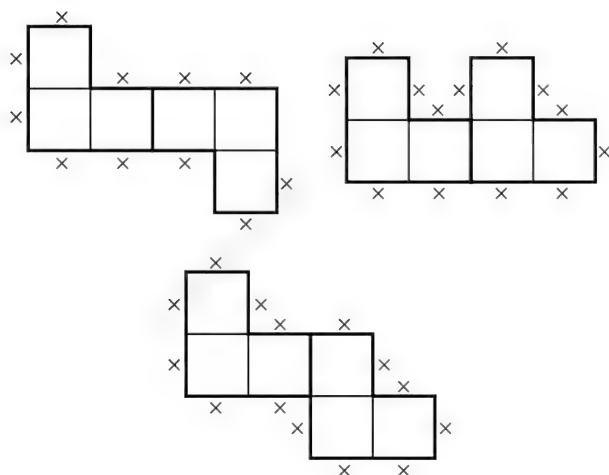
3.182 Tidak dapat.

3.183 Dapat. Salah satu caranya adalah sebagai berikut.

25	14	3	8	19
4	9	18	13	2
15	24	1	20	7
10	5	22	17	12
23	16	11	6	21

Nomor-nomor yang ada dalam setiap petak menyatakan urutan posisi dalam pergerakan bidak kuda tersebut.

3.184 a. Susunan-susunan yang mungkin adalah sebagai berikut.

(1) 10 orang

(2) 12 orang

(3) 14 orang

Susunan yang dapat memaksimalkan banyaknya orang yang dapat dimuat adalah susunan (3), yaitu susunan yang hanya menempelkan salah satu sisi dari masing-masing meja.

b. 211

c. $7n + 1$

3.185 8

3.186 14 tonggak

3.187 6 hari

3.188 3990 anak

3.189 Brenda dan Sherly

3.190 Senin

3.191 $a = b = c = d = 1$

3.192 $x = 2, x = \frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{2}$

3.193 a. 227 b. 36

3.194 $p(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$, dengan $d(n)$ adalah banyaknya faktor dari n, atau jika faktorisasi prima dari n adalah $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$, maka $p(n) = n^{\frac{(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_k+1)}{2}}$.

3.195 $n + \frac{1}{2}$

3.196 1

3.197 $\frac{\pi}{4}$

3.198 $\frac{\pi}{2}$

3.199 π

3.200 1

3.201 $\frac{\pi}{8}\ln 2$

3.202 0

3.203 $1 - \frac{\pi}{4}$

3.205 25π cm^2

3.206 Agar luas segitiga tersebut adalah setengah dari luas bendera, titik P haruslah merupakan titik tengah dari ruas garis tersebut.

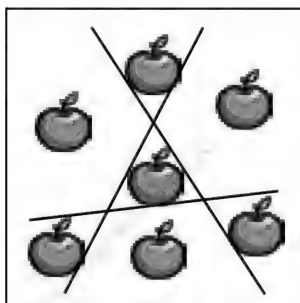
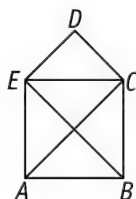
3.207 16

3.208 50

3.209 1681

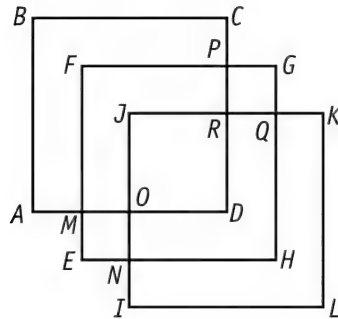
3.210 $B(1,1)$

3.212 400 cm

3.213 Dapat. Caranya adalah sebagai berikut.

3.214 a. Dapat.

Salah satu caranya adalah

$$A \to C \to D \to E \to B \to A \to E \to C \to B$$

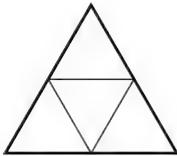
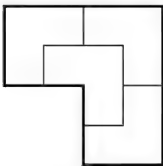
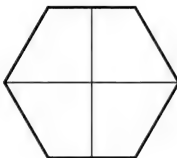
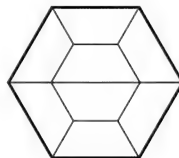
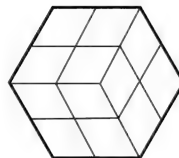
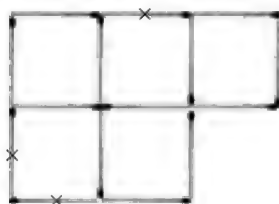
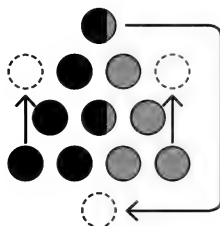
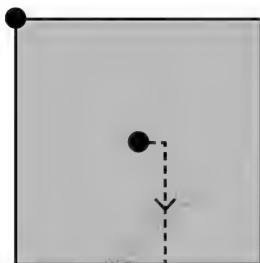
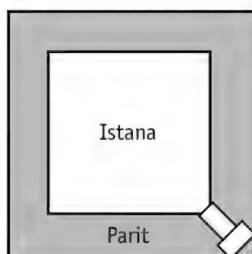
b. Cara membaginya adalah sebagai berikut.

3.215 Salah satu caranya adalah

$A \to B \to C \to P \to F \to M \to E \to N \to O \to J \to R \to Q \to K \to L \to I \to N$

$H \to Q \to G \to P \to R \to D \to O \to M \to A$

3.216 a.

b.

c.

3.217 Buanglah tiga batang korek api yang diberi tanda '×'.

3.218 Pindahkan ketiga koin pada ujung-ujung segitiga.

3.219 Cara murid tersebut membuat sang guru terkecoh adalah berenang dengan arah sebagai berikut.

3.220 Letakkan papan pertama menghubungkan dua sisi yang bertemu pada suatu sudut, kemudian letakkan papan kedua menghubungkan papan kedua dengan istana, seperti pada gambar di bawah.

3.221 Untuk menyeberangkan seorang pemuda dilakukan urutan langkah sebagai berikut.

No.	Langkah	Belum Menyeberang	Sudah Menyeberang
		4 pemuda, 2 anak	–
1	2 anak menyeberang		

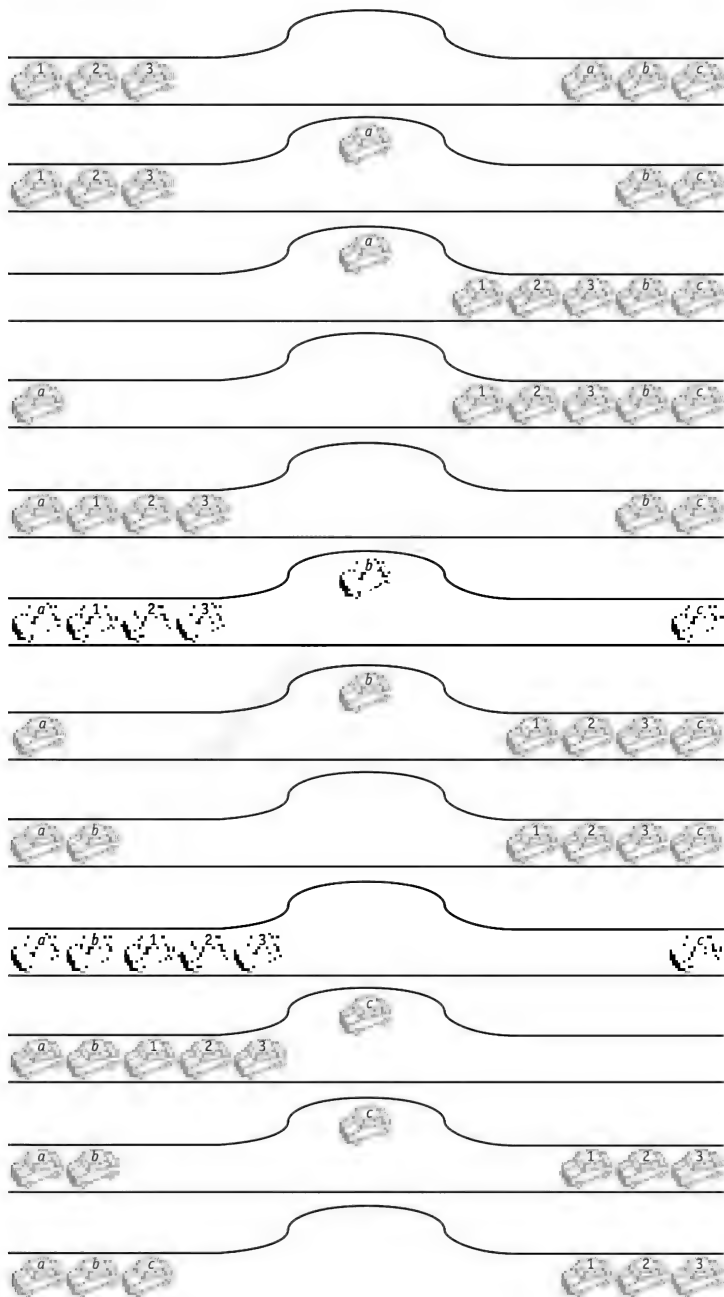
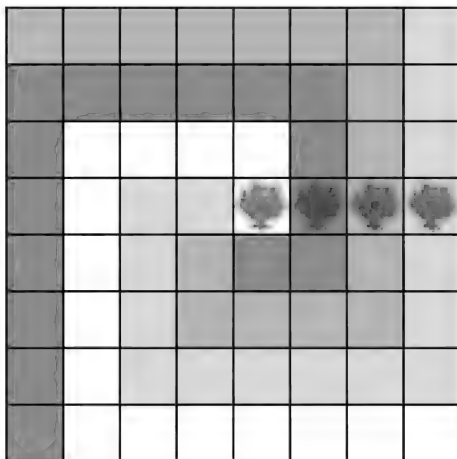
		4 pemuda	2 anak
2	1 anak kembali		
		4 pemuda, 1 anak	1 anak
3	1 pemuda menyeberang		
		3 pemuda, 1 anak	1 pemuda, 1 anak
4	1 anak kembali		
		3 pemuda, 2 anak	1 pemuda

Langkah ini diulang sampai dengan keempat pemuda selesai menyeberang, lalu kedua anak tersebut menyeberang.

3.222 Caranya adalah sebagai berikut.

No.	Langkah	Belum Menyeberang	Sudah Menyeberang	Waktu
		ayah, ibu, adik, nenek	–	
1	ayah dan ibu menyeberang			2 menit
		adik, nenek	ayah, ibu	
2	ayah kembali membawa senter			1 menit
		ayah, adik, nenek	ibu	
3	adik dan nenek menyeberang			10 menit
		ayah	ibu, adik, nenek	
4	ibu kembali			2 menit
		ayah, ibu	adik, nenek	
5	ayah dan ibu menyeberang			2 menit
		–	ayah, ibu, adik, nenek	

Total waktu yang diperlukan adalah 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 menit.

3.223 Langkah-langkah pertukaran posisi tersebut adalah sebagai berikut.

3.224 Cara membagi tanah tersebut adalah sebagai berikut.

BAB IV

4.1 a. Pada pola ke-1 diperlukan 8×1^2 segitiga dan 1^2 persegi.
Pada pola ke-2 diperlukan 8×2^2 segitiga dan 2^2 persegi.
Pada pola ke-3 diperlukan 8×3^2 segitiga dan 3^2 persegi.
Pada pola ke-4 diperlukan 8×4^2 segitiga dan 4^2 persegi.
dan seterusnya.

b. Pada pola ke-20 diperlukan $8 \times 20^2 = 3200$ segitiga dan $20^2 = 400$ persegi.

c. Pada pola ke-n diperlukan $8n^2$ segitiga dan n^2 persegi.

4.2 a. $P_1 = 16$, $P_2 = 18$, $P_3 = 52$, $P_4 = 54$, $P_5 = 88$, $P_6 = 90$

b. $P_n = \begin{cases} 18n - 2, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 18n - 18, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$

c. $P_n = 18n - 10 + (-1)^{n+1} \times 8$

4.3 $m + n - 1$

4.4 $n(n + 1)$

4.5 a. $\frac{1}{2}n(n+1)$

b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

maka $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n(n+1)^2$

4.6 a. $\frac{2}{3}$

4.7 a. Jika disorotkan 1 sinar laser, terjadi 0 pertabrakan.
Jika disorotkan 2 sinar laser, terjadi 1 pertabrakan.
Jika disorotkan 3 sinar laser, terjadi 1 + 2 = 3 pertabrakan.
Jika disorotkan 4 sinar laser, terjadi 1 + 2 + 3 = 6 pertabrakan.
Jika disorotkan 5 sinar laser, terjadi 1 + 2 + 3 + 4 = 10 pertabrakan.

b. Jika disorotkan n sinar laser, terjadi $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ pertabrakan.

4.8 a. $\frac{1}{2}n(n-3)$

b. $n(n-1)$

4.9 $(n+1)(m+1)$

4.10 a. $\prod_{n=0}^{0}\left(1+2^{-2^n}\right) = 1{,}5$

$\prod_{n=0}^{1}\left(1+2^{-2^n}\right) = 1{,}875$

$\prod_{n=0}^{2}\left(1+2^{-2^n}\right) = 1{,}9921875$

$\prod_{n=0}^{3}\left(1+2^{-2^n}\right) = 1{,}99969482421875$

b. 2

4.11 $n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + (n^2 - n + 5) + \ldots + (n^2 - n + (2n - 1))$

4.12 $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}} \times \frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}} \times \frac{1-\frac{1}{4^3}}{1+\frac{1}{4^3}} \times \ldots \times \frac{1-\frac{1}{(n+1)^3}}{1+\frac{1}{(n+1)^3}} = \frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

4.14 a. $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(8) = 8$, $f(16) = 16$

maka dugaan kita adalah $f(2^k) = 2^k$, untuk setiap bilangan bulat nonnegatif k.

b. $f(3) = 3$

c. $f(6) = 6$, $f(5) = 5$

d. $f(n) = n$, untuk setiap bilangan asli n.

f. $f(2011) = 2011$

4.15 a. Barisan-barisan yang sering dijumpai:

$$\{n\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$$
$$\{2n\} = \{0,2,4,6,8,10,12,14,\ldots\}$$
$$\{2n + 1\} = \{1,3,5,7,9,11,13,15,\ldots\}$$
$$\{n^2\} = \{0,1,4,9,16,25,36,49,\ldots\}$$
$$\{(-1)^n\} = \{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\}$$
$$\{2n^2\} = \{1,2,4,8,16,32,64,128,\ldots\}$$
$$\{n!\} = \{1,1,2,6,24,120,720,5040,\ldots\}$$

b. Dengan memilih $A_n = 2^n$ dan $B_n = n!$ atau sebaliknya, diperoleh dugaan $T_n = 2^n + n!$, untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n.

4.16 2^{n-1}

4.17 a. Data yang dikumpulkan dapat berupa tabel seperti di bawah ini.

Nomor Urut Sakelar	Nomor Urut Orang																	Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	
1	×																	**1**
2	×	×																2
3	×		×															2
4	×	×		×														**3**
5	×				×													2
6	×	×	×			×												4
7	×						×											2
8	×	×		×				×										4

Nomor Urut Sakelar	Nomor Urut Orang																	Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	
10	×	×			×					×								4
11	×										×							2
12	×	×	×	×		×						×						6
13	×												×					2
14	×	×					×							×				4
15	×		×		×										×			4
16	×	×		×				×								×		**5**
⋮																		⋮

Dugaan kita adalah sakelar-sakelar yang ON adalah sakelar-sakelar yang bernomor bilangan kuadrat, yaitu sebanyak 31 sakelar.

c. Sakelar yang paling banyak ditekan adalah sakelar-sakelar yang nomornya merupakan bilangan yang memiliki paling banyak faktor positif, yaitu 840, yang memiliki sebanyak 32 faktor positif.

d. Sakelar yang hanya ditekan sebanyak dua kali adalah sakelar-sakelar yang bernomor bilangan prima, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, dan seterusnya.

4.18 Semua nilai bilangan bulat nonnegatif n yang kurang dari 100, kecuali

0, 1 – 3, 4
9, 10 – 12, 13
27, 28 – 30, 31
36, 37 – 39, 40
81, 82 – 84, 85
90, 91 – 93, 94

4.19 minimal 1 kali dan maksimal 3 kali.

4.20 a. $$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

b. $$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

4.21 $a_n = n \times 2^{n-1}$ dan $b_n = 2^n$

4.22 Pencoretan faktor $(a - b)$ pada kedua ruas berarti membagi kedua ruas dengan nol.

4.23 Membagi kedua ruas dengan x berarti membagi kedua ruas dengan nol.

4.24 Jika $x^3 = 1$ bukan berarti $x = 1$, tetapi

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Jadi, persamaan ini memiliki tiga akar, yaitu satu akar real dan dua akar kompleks.

Di sini, akar realnya yaitu $x_1 = 1$ disebut *akar asing* (*extraneous root*), yaitu akar yang tidak memenuhi persamaan awal (muncul pada suatu bagian dari proses pengerjaan), sedangkan dua akar kompleks lainnya merupakan akar yang dipertahankan sejak awal, yaitu

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

4.25 Perkalian kedua ruas dengan ${}^{10}\log\frac{1}{2}$ merupakan perkalian kedua ruas dengan bilangan negatif, yang seharusnya mengubah arah tanda pertidaksamaan.

4.26 Pernyataan

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

tidak mengakibatkan

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

tetapi

$$4 - \frac{9}{2} = \pm\left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

4.27 Dalam pemangkatan suatu persamaan dengan suatu bilangan tertentu, akan dihasilkan suatu persamaan yang dapat memuat akar

baru, yang disebut *akar asing* (*extraneous root*). Hal ini penting untuk diperhatikan ketika kita bekerja dengan melakukan manipulasi aljabar, dan untuk mendeteksi kemunculan akar asing ini kita dapat mensubstitusikan hasil yang kita peroleh pada persamaan awal. Akar yang tidak memenuhi persamaan awal merupakan akar asing. Sebagai contoh sederhana, misalkan jika $2x = 1$, maka dengan menguadratkan kedua ruas diperoleh $4x^2 = 1$ yang dapat ditulis menjadi $4x^2 - 1 = 0$ atau $(2x - 1)(2x + 1) = 0$ sehingga $x = \frac{1}{2}$ dan $x = -\frac{1}{2}$. Dalam hal ini $x = -\frac{1}{2}$ merupakan akar asing yang tidak memenuhi persamaan awal.

Dalam hal ini, akar yang kita temukan yaitu $x = 2$ merupakan akar asing, yang berarti persamaan awal tidak memiliki akar bilangan real.

4.28 Kita perhatikan bahwa penjumlahan $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ dan $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$ keduanya menghasilkan tak berhingga, dan oleh karena itu pengurangan keduanya menghasilkan suatu bentuk tak tentu yaitu $\infty - \infty$, bukan menghasilkan 1.

4.29 Kesalahan ini terletak pada asumsi bahwa persamaan (1) sama dengan persamaan (2). Kesalahan ini sama dengan kesalahan berikut.

$$x + 1 = 2 \qquad (1)$$

$$x + 1 = 3 \qquad (2)$$

Karena persamaan (1) sama dengan persamaan (2), maka

$$2 = x + 1 = 3$$

Jelas terlihat bahwa kesalahan ini disebabkan oleh persamaan (1) dan (2) yang merupakan persamaan yang dipenuhi oleh nilai x yang berbeda dan tertentu.

4.30 Pernyataan

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$$

tidak mengakibatkan

$$\cos x = \sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}$$

tetapi

$$\cos x = \pm\sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}$$

4.31 Pada langkah terakhir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = 0+0+0+\ldots+0$$

tidak mengakibatkan

$$\frac{1}{2} = 0$$

sebab ruas kanan terdiri atas penjumlahan dari tak berhingga angka nol, yang berarti

$$\underbrace{0+0+0+\ldots+0}_{\infty} = \infty \times 0$$

yang merupakan bentuk tak tentu.

Sebenarnya dari awal kita telah "terkecoh" dengan cara kita menuliskan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$$

sebagai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

Dengan cara penulisan ini seakan-akan limit-limit yang dijumlahkan tersebut ada sebanyak berhingga, yaitu sebanyak n, padahal sebenarnya tidak demikian. Banyaknya limit-limit yang dijumlahkan ini ada sebanyak tak berhingga.

4.32 Kesalahan terjadi karena kita menganggap x sebagai variabel, padahal di sini x merupakan suatu konstanta, yaitu $x = -1$. Karena tidak pernah ada diferensial terhadap suatu konstanta, maka menurunkan kedua ruas terhadap x, yang merupakan suatu konstanta, merupakan langkah yang salah.

4.33 Kita tidak dapat benar-benar mengurangi $\int \frac{1}{x}dx$ pada kedua ruas, sebab bentuk integral ini merupakan *integral tak tentu* yang nilainya tidak selalu sama, sebab bergantung pada konstanta.

4.34 Sifat $\ln(e^x) = x$ hanya berlaku untuk x bilangan real dan tidak berlaku untuk x bilangan kompleks.

BAB V

5.1 66

5.2 $b - a + 1$

5.3 43

5.4 $b - a - 1$

5.5 50

5.6 106

5.7 $b - n + 1$

5.8 $n + a - 1$

5.9 $n + 2$

5.10 $\frac{k}{3} + 1$

5.11 $n - p + 1$

5.12 $m + 3$

5.13 $a + 1$

5.14 42

5.15 46

5.16 23

5.17 20

5.18 20

5.19 10

5.20 250

5.21 267

5.22 25

5.23 133

5.24 301

5.25 166

5.26 201

5.27 221

5.28 80

5.29 a. $1+2+3+\ldots+1\underbrace{000\ldots0}_{2011} = 5\underbrace{000\ldots0}_{2010}5\underbrace{000\ldots0}_{2010}$

b. $1^2+2^2+3^2+\ldots+1\underbrace{000\ldots0}_{2011}{}^2 = \underbrace{333\ldots3}_{2011}8\underbrace{333\ldots3}_{2010}5\underbrace{000\ldots0}_{2010}$

5.30 1414

5.31 2100

5.32 18832

5.33 77150

5.34 Kesalahan terletak pada

$$\cancel{1}+(2+1)+(4+1)+(6+1)\ldots+(2n-\cancel{1}) = (2+4+6+\ldots+2n) + \left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n-2}\right)$$

di mana terjadi perubahan banyaknya suku. Banyaknya suku pada penjumlahan $2+4+6+\ldots+2n$ adalah $n-1$, bukan n. Untuk menghindari kesalahan ini, bentuk di atas dapat dikerjakan sebagai

$$(2-1)+(4-1)+(6-1)+\ldots+(2n-1) = (2+4+6+\ldots+2n) - \left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}\right)$$

atau

$$(0+1)+(2+1)+(3+1)+\ldots+[(2n-2)+1] = [0+2+4+\ldots+(2n-2)] - \left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}\right)$$

5.37

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{1023}{1024}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^1}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$=\left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{10}\right)-\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$=9+\frac{1}{2^{10}}$$

5.38 $2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{8}}\times 16^{\frac{1}{16}}\times\ldots\times(2^n)^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{n}{2^n}}$

$$=2^{2-\frac{n+2}{2^n}}$$

5.39 $\frac{3}{5}$

5.40 $\frac{1}{4}n(n-1)$

5.41 $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

5.42 $\frac{2}{3}$

5.43 a. $\frac{1}{3}n(2n+1)(4n+1)$

b. $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

c. $\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

5.44 $n^2(2n^2-1)$

5.45 $n=10$

5.46 $a^2n+adn^2-adn+\frac{1}{3}d^2n^3-\frac{1}{2}d^2n^2+\frac{1}{6}d^2n$

5.47 $a^3n+\frac{3}{2}a^2dn^2-\frac{3}{2}a^2dn+ad^2n^3-\frac{3}{2}ad^2n^2+\frac{1}{2}ad^2n+\frac{1}{4}d^3n^4-\frac{1}{2}d^3n^3$
$+\frac{1}{4}d^3n^2$

5.48 $\frac{1}{2}\left[4(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n-1\right]$

5.49 $(-1)^{n-1}n(4n^2-3)$

5.50 a. $\dfrac{p(p^n-q^n)}{p-q}$

b. $\dfrac{p\left[(an+b)p^{n+1}-\left[a(n+1)+b\right]p^n-bp+a+b\right]}{(p-1)^2}$

c. $\dfrac{p\left[(an^2+bn+c)p^{n+2}+(-2an^2-2an+a-2bn-b-2c)p^{n+1}+\left[a(n+1)^2+b(n+1)+c\right]p^n-cp^2+(-a+b+2c)p-a-b-c\right]}{(p-1)^3}$

5.51 a. $2n^2-3n+7$

b. n^3-3n^2+2n+5

c. $n^4-2n^3+4n^2-5n+7$

5.52 a. n^3

b. $\frac{1}{2}n\left(n^2+2\right)\left(3n^2+1\right)$

5.53 a. $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

b. 2024072

5.54 a. $\frac{1}{2}n(n+1)$ b. $\frac{3}{2}n(n+3)$

5.55 a. n^2+n-2 b. $\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n-1$

5.56 a. 2551 b. 33 dan 95

5.57 a. 375

b.

	117	
124	125	126
	133	

5.58 677

5.59 $\frac{10}{81}n.10^n-\frac{1}{18}n-\frac{10}{729}.10^n+\frac{10}{729}-\frac{1}{18}n^2$

5.60 $\frac{1}{24}n(2n^2+9n+13)$

5.61 -2017035

5.62 a. 5, 11, 19, 29, 41, ...

b. $n^2 + 3n + 1$

5.63 $\sqrt{b^4+n(n+b)(n+2b)(n+3b)} = n^2+3bn+b^2$

5.64 9

5.65 $\frac{25}{151}$

5.66 $\frac{200}{101}$

5.67 $\frac{1}{100}$

5.68 $1-\frac{1}{(n+1)!}$

5.69 $(n + 1)(n + 1)! - 1$

5.70 $\frac{(n+2)!}{2^n}-2$

5.71 $\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$

5.72 $\frac{n}{4n+1}$

5.73 $\frac{3}{2}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}$

5.74 $1-\frac{1}{(n+1)^2}$

5.75 $\frac{6n}{n+1}$

5.76 $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

5.77 $1-\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$

5.78 $\frac{2n}{2n+1}$

5.79 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+2)}$

5.80 $1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

5.81 a. $\frac{n}{a(a+nd)}$ b. $\frac{n(2a+nd)}{a^2(a+nd)^2}$

5.82 $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

5.83 $n+1-\frac{1}{n+1}$

5.84 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1}-1\right)$

5.85 $1-\frac{1}{(n+1)^3}$

5.86 $1-\frac{2}{2^n+1}$

5.87 a. $\frac{1}{2}n(n+1)$

b. $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

c. $k(k+1)(2k+1)-(k-1)k(2k-1)=6k^2, \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5.88 $\frac{2n^2}{2n^2+2n+1}$

5.89 $-\dfrac{2n+1}{2n-1}$

5.90 $\dfrac{3(n+1)}{n+3}$

5.91 $\dfrac{3n}{n+2}$

5.93 $\dfrac{16}{5}n^2+\dfrac{16}{5}n+1$

5.94 $\dfrac{1}{r!d^r}\left[\dfrac{\binom{r}{0}}{k}-\dfrac{\binom{r}{1}}{k+d}+\dfrac{\binom{r}{2}}{k+2d}-\dfrac{\binom{r}{3}}{k+3d}+\ldots+(-1)^r\dfrac{\binom{r}{r}}{k+rd}\right]$

5.95 $\dfrac{1}{rd^r}\left[\dfrac{1}{r!k}-\dfrac{1}{(k+d)(k+2d)\ldots(k+rd)}\right]$

BAB V

6.1 a. $\underbrace{666\ldots6}_{1006}$ b. $\underbrace{666\ldots6}_{1005}8$

6.2 $\underbrace{333\ldots3}_{2010}4$

6.3 $\underbrace{111\ldots1}_{4022}$

6.4 $\underbrace{333\ldots3}_{2011}5$

6.5 $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{n}0\underbrace{222\ldots2}_{n}4}=\underbrace{333\ldots3}_{n}2$

6.6 18090

6.7 58

6.8 $1\underbrace{666\ldots6}_{2009}7$

6.9 4

6.10 $1340+\frac{100}{27}(10^{2010}-1)$

6.11 3

6.12 7

6.13 4

6.14 3

6.15 51

6.16 99

6.17 09

6.18 07

6.19 281

6.20 237

6.21 a. 3
b. 13
c. 313

6.22 9

6.23 a. 23
b. 251
c. 326
d. 399

6.25 1000

6.28 409

6.29 2263

6.30 a. 2
b. 501

6.31 a. 11
b. 2002
c. $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$, dengan $p^k \le n$

d. 1) 94

2) 94

6.32 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{4}$

6.33 $p - 1$

6.34 $p(p - 1)$

6.35 $p^2(p - 1)$

6.36 $p^{e-1}(p - 1)$

6.37 $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$

6.38 $(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)$

6.39 $(p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots (p_k - 1)$

6.40 $p_1(p_1 - 1)(p_2 - 1)$

6.41 $p_1^2(p_1 - 1)(p_2 - 1)$

6.42 $p_1^{e-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$

6.43 $p_1^{e_1-1}(p_1 - 1)p_2^{e_2-1}(p_2 - 1)\ldots p_k^{e_k-1}(p_k - 1)$

6.44 528

6.45 2010

6.46 1004

6.47 $n \geq 3$

6.48 a. 35, 39, 45, 52, 56, 70, 72, 78, 84, 90

b. tidak ada.

6.49 $n = 2^k$, dengan k bilangan asli.

6.50 100

6.51 360

6.52 502

BAB VII

7.1 $U_n = U_1 + 2n - 2$

7.2 $U_n = U_1 3^{n-1}$

7.3 $U_n = (U_1 + 1)3^{n-1} - 1$

7.4 $U_n = (U_1 + 2)3^{n-1} - n - 1$

7.5 $U_n = (U_1 + 3n - 3)3^{n-1}$

7.6 $U_n = (U_1 + 4)3^{n-1} - 2^{n+1}$

7.7 $U_n = \left[6U_1 + 3^n(2n-1) - 3\right]2^{n-2}3^{-n}$

7.8 $U_n = (U_1 + 11)2^{n-1} - n^2 - 4n - 6$

7.9 $U_n = \frac{1}{54}\left[(8 - 27U_1)(-2)^n + 18n^2 + 6n - 8\right]$

7.10 $U_n = \frac{1}{12}\left[(3U_1 + 1)4^n - 4\right]$

7.11 $U_n = \frac{2}{3}\left[(U_1 + 22)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 9n - 24\right]$

7.12 $U_n = \frac{1}{54}\left[(-27U_1 + 23)(-2)^n + 18n^2 + 24n + 4\right]$

7.13 $U_n = \frac{1}{4}\left[-4U_1(-1)^n + 4n^2 - 2n + (-1)^n - 1\right]$

7.14 $U_n = \frac{1}{225}\left[(45U_1 + 20)5^n + 25 \cdot 2^{n+1}(3n - 4)\right]$

7.15 $U_n = (U_1 - 81)2^{n-1} + 3^{n+1}(n^2 - 5n + 13)$

7.16 $U_n = (U_1 - 2n^3 - 3n^2 - n + 6)6^{n-1}$

7.17 $U_n = U_1 2^{n-1} + (2 \cdot 3^{n+1} - 1)n + 15 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^{n+1} - 2$

7.18 $U_n = \frac{1}{12}\left[-4(U_1 + 8)(-3)^n + 3^{n+1}(2n + 6(-1)^n - 7) + 3\right]$

7.19 $U_n = 2^{n-1}(U_1 + n^2 - n + 17) + 3^{n+1}(n-3) + 1$

7.20 $U_n = \frac{2^{n-3}}{3}\left[2^n(2U_1 + U_2) - 2(-1)^n(4U_1 - U_2)\right]$

7.21 $U_n = 3^{n-2}\left[(n-1)U_2 - 3(n-2)U_1\right]$

7.22 $U_n = \frac{5^{-n}}{6}\left[25(U_1 + U_2) - (-5)^n(U_1 - 5U_2)\right]$

7.23 $U_n = \frac{1}{48}\left[(-3)^n(-4U_1 + 4U_2 - 1) + 12n + 36U_1 + 12U_2 - 15\right]$

7.24 $U_n = \frac{2^{-n-2}}{15}\left[-20((-2)^n - 4)U_1 + 40((-2)^n + 2)U_2 + 27(-5(-2)^n + 6^n - 16)\right]$

7.25 $U_n = \frac{1}{2}\left[-n^2 + 2^n(-U_1 + U_2 + 4) - 5n + 4U_1 - 2U_2 - 2\right]$

7.26 $U_n = \frac{1}{72}\left[8^n(U_1 + U_2) - 8(-1)^n(8U_1 - U_2)\right]$

7.27 $U_n = \frac{6^{-n-1}}{95}\left[27 \cdot 10^n(4U_2 - 3) + 3^{n+1}(8(-3)^n(5U_2 + 1) + 57 \cdot 2^n) - 2(100(-9)^n - 81 \cdot 10^n)U_1\right]$

7.28 $U_n = \frac{1}{720}\left[-45(-1)^n(20U_1 + 4U_2 + 5) + 36(-5)^n(U_1 + U_2) - 60n + 17(-5)^n - 80\right]$

7.29 $U_n = \frac{3^{-n}}{10}\left[(9 \cdot 2^n - 4(-3)^n)U_1 + 2 \cdot 3^n(3(-1)^n U_2 - 3(-1)^n + 20) + 9 \cdot 2^n(U_2 - 6) + 5 \cdot 3^n(n^2 - 3n)\right]$

7.30 $U_n = \frac{1}{9}\left[2^{1-n}3^n(n(-3U_1 + 2U_2 + 8) + 6U_1 - 2U_2 + 16) - 9 \cdot 2^{n+2}\right]$

7.31 $U_n = \frac{1}{6}\left[3^n(-U_1 + U_2 - 64) + 2^{2n+5} + 9U_1 - 3U_2 + 64\right]$

7.32 $U_n = \frac{1}{120}\left[5^n(150n^2 + 4U_1 + 4U_2 - 525) - 5(-1)^n(20U_1 - 4U_2 + 375)\right]$

7.33 $U_n = U_{n-1} + 2n,\ U_1 = 0$

$U_n = n^2 + n - 2$

7.34 n

7.38 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

7.39 a. $\frac{1}{3}(2^{18}-1)$ b. $\frac{1}{3}\left[(-1)^n+2^{n+1}\right]$

7.41 a. $d_n = d_{n-1} + 2n,\ d_1 = 1$

$d_n = n^2 + n - 1$

b. $s_n = s_{n-1} + 8n^2 - 8n,\ s_1 = 1$

$s_n = \frac{8}{3}n^3 - \frac{8}{3}n + 1$

7.42 a. 1, 9, 36, 100

b. Misalkan U_n menyatakan banyaknya persegi berbeda yang ada pada papan catur berukuran $n \times n$.

$U_n = U_{n-1} + n^2,\ U_1 = 1$

c. $U_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

7.43 $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

7.44 a. $U_1 = 4,\ U_2 = 23,\ U_3 = 58,\ U_4 = 109$

b. $U_n = U_{n-1} + 16n - 13,\ U_1 = 4$

c. $U_n = 8n^2 - 5n + 1$

7.55 $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + \ldots + (-1)^{n+1}f_n = (-1)^{n-1} f_{n-1} + 1$

7.56 $1-\frac{1}{f_{n+2}}$

7.57 $13 = f_5 + f_6$

$52 = f_5 + f_7 + f_9$

$$88 = f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10}$$
$$143 = f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11}$$

BAB VIII

8.24 $999! < 500^{999}$

8.28 5

8.29 108

8.35 $\ln k$

8.37 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{999999}{1000000} < \frac{1}{1000}$

8.41 198

8.42 $1998{,}17 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999{,}00$

8.47 62

8.51 a. $\frac{1902}{110} < \frac{1}{S} < \frac{2011}{110}$

b. $\frac{1901}{110} < \frac{1}{S} < \frac{3913}{220}$

c. Penaksiran dengan penggunakan pertidaksamaan pada soal 8.50 lebih baik. Bagian bulatnya adalah 17.

8.57 4

8.58 n

8.59 $n + 1$

Daftar Pustaka

Sumber Buku

Alisah, Evawati. 2007. *Filsafat Dunia Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustaka.

Andreescu, Titu dan Razvan Gelca. 2009. Mathematical Olympiad Challenges. New York: Springer.

Andreescu, Titu dan Zuming Feng. 2004. *A Path to Combinatorics for Undergraduates*. Washington, D.C.: Birkhäuser.

Andreescu, Titu. 2001. *Mathematical Olympiad Challenges*. New York: Birkhäuser.

Briggs, William. 2005. *Ants, Bikes, and Clocks: Problem Solving for Undergraduates*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Brualdi, R. A.. 1996. *Introductory Combinatorics*. New Jersey: Prentice Hall.

Budhi, Wono Setya. 2005. Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika. Jakarta: CV Ricardo.

Burton, David. 1998. *The History of Mathematics: An Introduction*. New York: McGraw-Hill.

Burton, David. 2011. *Elementary Number Theory*. Boston: McGraw-Hill.

Chew, Terry. 2008. *Maths Olympiad: Advanced*. Singapore: Singapore Asian Publications.

Chuan-Chong, C. dan K. Mhee-Meng. 1992. *Principles and Techniques in Combinatorics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pvt. Ltd..

Crilly, Tony. 2007. *50 Mathematical Ideas You Really Need To Know*. London:Quercus.

D'Angelo, J. P. dan D. B. West. 2000. *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*. New Jersey: Prentice Hall.

Dharmawi, Hendra, dkk.. 2007. *Jago Olimpiade Matematika*. Banten: i-Publishing.

DiSpezio, Michael A., dan Myron Miller. 1997. *Great Critical Thinking Puzzles*. *New York*: Sterling.

Erickson, Martin J. dan Joe Flowers. 1999. Principles of Mathematical Problem Solving. New Jersey: Prentice Hall.

Gardiner. 1988. *Discovering Mathematics: The Art of Investigation*. New York: Oxford University Press.

Hanna, G., et. al.. 2010. *Explanation and Proof in Mathematics*. New York: Springer.

Hein, James L.. 2002. *Discrete Mathematics*. Portland: Jones & Bartlett.

Holton, Derek. 2009. *A First Step to Mathematical Olympiad Problems*. Singapore: World Scientific.

Honsberger, R.. 1997. *In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Johnsonbaugh, Richard. 2008. *Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice Hall.

Kim Hung, Pham. 2007. *Secrets in Inequalities*. Zaléu: GIL Publishing House.

Krantz, Steven G.. 2008. *Discrete Mathematics Demystified*. New York: McGraw-Hill.

Krantz. Steven G.. 1997. *Techniques of Problem Solving*. Providence: American

Larson, Loren C. 1983. *Problem Solving Through Problems*. New York: Springer-Verlag.

Marini, Arita. 2010. *Matematika Dasar*. Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan, Kemendiknas.

Michael. 2009. *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Moektijono, Tobi. 2009. *Kumpulan Soal Unik Matematika 1*. Jakarta: PT Grasindo.

Moektijono, Tobi. 2009. *Kumpulan Soal Unik Matematika 2*. Jakarta: PT Grasindo.

Moektijono, Tobi. 2010. *Kumpulan 73 Soal Unik Matematika*. Jakarta: PT Grasindo.

Niven, I. M.. *Mathematics of Choice: How to Count Without Counting*. Washington, D.C.: MAA.

P. P. *Korovkin*. 1975. *Inequalities: Little Mathematics Library*. Moscow: MIR Publishers.

Polya, George dan Jeremy Kilpatrick. 2009. *The Stanford Mathematics Problem Book With Hints and Solutions*. New York: Dover Publications.

Polya, George. 1965. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley.

Posamentier, A. S.. 1996. *The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher*. California: Corwin Press.

Posamentier, Alferd S. dan Stephen Krulik. 1998. *Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solution. California:* Corwin Press.

Rosen, Kenneth H.. 1998. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: McGraw-Hill.

Setiawan, Tedy, dkk.. 2007. *Aljabar* 123^{+45}. Bandung: CV. Yrama Widya.

Soifer. 2008. *Mathematics as Problem Solving*. New York: Springer.

Susianto, Bambang. 2004. *Olimpiade Matematika dengan Proses Berpikir Aljabar dan Bilangan*. Jakarta: PT Grasindo.

Thomas, G. B. dan R. L. Finney. 1996. *Calculus and Analytic Geometry*. Massachusetts: Addison Wesley.

Tim Surya Institute. 2007. *Eksplorasi Matematika yang Mengasyikkan*. Jakarta: Kandel.

Tim Surya Institute. 2007. *Strategi Penyelesaian Soal-soal Matematika yang Mengasyikkan*. Jakarta: Kandel.

Wickelgren, Wayne A. 1995. How to Solve Mathematical Problems. New York: Dover Publications.

Yao Tung, Khoe. 2008. *Memahami Teori Bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: PT Grasindo.

Zeitz, Paul. 1999. *The Art and Craft of Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons.

Sumber Internet

http://idrismatematika.blogspot.com/2011/01/pendekatan-pemecahan-masalah.html diunduh 20 Mei 2011 pukul 10.40.

http://cimm.ucr.ac.cr/resoluciondeproblemas/PDFs/Leikin,R.%20Berman,A.%20%20Zaslavsky,%200.%20Applications%20...pdf diunduh 20 Mei 2011 pukul 10.40.

http://www.cs.uiuc.edu/class/sp09/cs173/Lectures/lect_18.pdf diunduh 24 Mei 2011 pukul 12.55.

http://www.geometer.org/mathcircles/pilesubdivide.pdf diunduh 24 Mei 2011 pukul 13.40.

http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Ford/Schoenfeld794-805.pdf diunduh 24 Mei 2011 pukul 18.46.

http://zer0toinfty.wordpress.com/majalah-zer0-edisi-01-juli-2008/ diunduh 25 Mei 2011 pukul 16.15.

http://zer0toinfty.wordpress.com/majalah-zer0-edisi-02-agustus-2008/ diunduh 25 Mei 2011 pukul 16.15.

http://home.unpar.ac.id/~benny_y/Mengapa%201=2.pdf diunduh 25 Mei 2011 pukul 16.21.

http://colegiosantamarcelina.com.br/Theorema/acredite.pdf diunduh 25 Mei 2011 pukul 16.27.

http://esupriyadi.wordpress.com/2009/10/20/perhitungan-guidobaldo-del-monte-yang-salah/ diunduh 25 Mei 2011 pukul 16.26.

http://www.smart-kit.com/s671/matches-squares-brain-teaser/ diunduh 24 Mei 2011 pukul 12.14.

http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Engelke.pdf diunduh 26 Mei 2011 pukul 18.25.

http://www.krysstal.com/binomial.html diunduh 27 Mei 2011 pukul 06.59.

http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle diunduh 27-5-2011 pukul 07.11.

http://www.squarecirclez.com/blog/the-twelve-days-of-christmas-how-many-presents/1686 diunduh 27 Mei 2011 pukul 09.13.

http://ptri1.tripod.com/ diunduh 22 April 2011 pukul 20.50.

http://elearning.gunadarma.ac.id/docmodul/psikologi_umum_1/Bab_7.pdf diunduh 27 Mei 2011 pukul 15.51.

http://rian.hilman.web.id/?p=52 diunduh 27 Mei 2011 pukul 16.39.

http://en.wikipedia.org/wiki/Repdigit diunduh 28 Mei 2011 pukul 21.57.

http://en.wikipedia.org/wiki/Repunit diunduh 28 Mei 2011 pukul 21.58.

http://takshzilabeta.com/cat-quant/number-systems/last-two-digits-binomial-cyclicity/ diunduh 29 Mei 2011 pukul 08.29.

http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem diunduh 29 Mei 2011 pukul 22.24.

http://paradoks77.blogspot.com/2011/01/paradoks-monty-hall.html diunduh 29 Mei 2011 pukul 22.33.

http://www.youtube.com/watch?v=koPBkK_Ra-k diunduh 30 Mei 2011 pukul 18.10.

http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number diunduh 2 Juni 2011 pukul 10.55.

http://www.matematikamenyenangkan.com/fakta-menarik-seputar-bilangan-fibonacci/ diunduh 2 Juni 2011 pukul 11.47.

http://www.mathsisfun.com/numbers/fibonacci-sequence.html diunduh 2 Juni 2011 pukul 15.04.

http://aam.org.in/st_material/14.pdf diunduh 3 Juni 2011 pukul 09.37.

http://ariaturns.wordpress.com/2010/02/14/pembuktian-yang-pertama/ diunduh 3 Juni 2011 pukul 10.09.

http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy diunduh 3 Juni 2011 pukul 11.36.

http://www.openmathtext.org/noteslist.php diunduh 4 Juni 2011 pukul 09.36.

http://en.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain diunduh 13 Juni 2011 pukul 09.08.

http://condor.admin.ccny.cuny.edu/~kb1954/problem_2.htm diunduh 21 Juni 2011 pukul 06.28.

http://condor.admin.ccny.cuny.edu/~kb1954/solution_2.htm diunduh 21 Juni 2011 pukul 06.28.

http://web.eng.ubu.ac.th/~m_eng_pd/WebCD%20on%20CNC-CAD-CAM%20%28Charoenc%29/courses/problems.htm diunduh 2 Juli 2011 pukul 11.27.

http://web.eng.ubu.ac.th/~m_eng_pd/WebCD%20on%20CNC-CAD-CAM%20%28Charoenc%29/courses/solution011.htm diunduh 2 Juli 2011 pukul 11.27.

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_fallacy diunduh 5 Juli 2011 pukul 20.09.

http://olimpiade.org/Forum/?qa=1670/menghindari-nyontek diunduh 10 Juli 2011 pukul 20.13.

http://www.puzzles.com diunduh 6 Maret 2011 pukul 12.53.

http://library.thinkquest.org/25459/learning/problem/pssimpler.html diunduh 6 Maret 2011 pukul 12.58.

http://mathworld.wolfram.com/TotientFunction.html diunduh 12 Maret 2011 pukul 10.14.

http://id.wikipedia.org/wiki/Menara_Hanoi diunduh 13 Maret 2011 pukul 19.23.

http://hendrydext.blogspot.com/2009/06/pigeonhole-principle-i.html diunduh 25 November 2010 pukul 10.42.

http://hendrydext.blogspot.com/2009/06/pigeonhole-principle-ii.html diunduh 25 November 2010 pukul 10.45.

Tentang Penulis

Jonathan Hoseana, lahir di Surabaya pada tanggal 16 September 1992. Setelah lulus dari SMA Santa Maria Surabaya pada tahun 2010 dengan meninggalkan sejumlah prestasi yang dulu diraihnya di berbagai perlombaan matematika, ia melanjutkan pendidikan dengan mengambil jurusan matematika di Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. Saat itu, ia sempat beraktivitas sebagai asisten pengajar mata kuliah matematika dan pemrograman komputer di berbagai jurusan, sebagai pengajar matematika dan pelatih olimpiade matematika di beberapa sekolah, sebagai pelatih bahasa pengetikan LaTeX, serta sebagai koordinator divisi materi dan pembawa materi *workshop* di Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan.

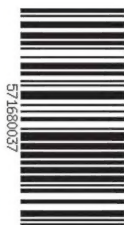
Pada tahun 2014, ia diwisuda dan mengakhiri masa pendidikan sarjana yang telah dijalaninya selama 7 semester dengan Indeks Prestasi Kumulatif 4.00. Saat ini beliau sedang menempuh program MSc di bidang matematika di Queen Mary University of London, Inggris, program Beasiswa Pendidikan Indonesia dari Lembaga Pengelola Dana Pendidikan (LPDP) untuk. Ia tertarik dengan bidang kajian matematika diskret, khususnya aljabar abstrak, teori bilangan, dan kombinatorika.

OLIMPIADE

MATEMATIKA SMA/MA

Salah satu ajang kompetisi yang cukup bergengsi dikalangan siswa adalah olimpiade keilmuan, seperti OSN, lomba mapel, lomba cerdas cermat, dll. Berbagai cara dilakukan oleh sekolah untuk meraih prestasi sebanyak-banyaknya dalam kompetisi ini, mulai dari bekerja sama dengan lembaga khusus pelatihan olimpiade, mengadakan pelatihan rutin tiap minggunya oleh guru sekolah, dll. Memang untuk memaksimalkan prestasi, diperlukan suatu *teamwork* antara pihak sekolah dan siswa agar mampu bersaing dengan sekolah lainnya.

Buku ***Top Sukses Olimpiade Matematika SMA/MA*** dirancang khusus untuk mempersiapkan siswa menghadapi Olimpiade Matematika dan Kompetisi Matematika lainnya. Buku ini tersusun atas Materi yang dikonsep untuk menyiapkan siswa menghadapi Olimpiade Matematika, Trik jitu penyelesaian soal-soal Olimpiade Matematika dari soal termudah sampai tersulit, Kumpulan soal Olimpiade Sains Nasional (OSN) Matematika paling *uptodate*, dan penggunaan pertidaksamaan AM-GM dalam masalah nilai ekstrem.

Selamat belajar dan semoga sukses!!!

PT Gramedia Widiasarana Indonesia
Kompas Gramedia Building
Jl. Palmerah Barat No. 33-37, Jakarta
Telp. (021) 5365 0110, 5365 0111 ext
Fax: (021) 53698098
www.grasindo.id
Twitter: grasindo_id
Facebook: Grasindo Publisher